

GA-038 Processamento Digital de Sinais (1.º Período de 2025)

Paulo Esquef (31.12.2024)

Material Complementar: Exemplos de solução geral de uma Equação de Diferenças.

Exercício Resolvido 1:

Obtenha a solução geral para a ED de segunda ordem $y[n] = -y[n-1] + 6y[n-2] + x[n]$, para a entrada particular $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, sabendo que as condições auxiliares são $y[0] = 1$ e $y[1] = -1$.

Solução:

Sabemos que a solução geral será da forma $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$, onde $y_h[n]$ é a solução da ED homogênea e $y_p[n]$ a solução para a entrada particular $x[n]$.

Obtenção da solução $y_h[n]$ da ED Homogênea pelo método analítico:

A forma geral da solução $y_h[n]$ para uma ED Homogênea de segunda ordem: $y_h[n] = A_1 \alpha_1^n + A_2 \alpha_2^n$, com α_1 e α_2 sendo as raízes do polinômio característico $P(\lambda)$ da ED.

$$P(\lambda) = 1 + \lambda^{-1} - 6\lambda^{-2}$$

Usando o matlab para obter as raízes:

```
>> r=roots([1 1 -6])
```

```
r =  
    -3  
     2
```

As raízes de $P(\lambda)$ são $\alpha_1 = -3$ e $\alpha_2 = 2$. Logo, $y_h[n] = A_1(-3)^n + A_2 2^n$, $n \geq 0$. Caso soubéssemos as CAs $y_h[n_0]$ e $y_h[n_1]$ para a ED homogênea, poderíamos obter valores de A_1 e A_2 resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} y_h[n_0] = A_1(-3)^{n_0} + A_2 2^{n_0} \\ y_h[n_1] = A_1(-3)^{n_1} + A_2 2^{n_1} \end{cases}$$

Entretanto, as CAs só são conhecidas para instantes em que a entrada $x[n]$ já foi aplicada ao sistema. Logo, as CAs só podem ser usadas para a solução da ED completa e, por ora, temos que deixar $y_h[n]$ escrita em função dos parâmetros A_1 e A_2 .

1. Pode-se fazer $\beta = 2$ de antemão, pois o sistema é linear.
2. Caso se escolha $y_p[n] = A\beta^n u[n] + Bn\beta^n u[n]$, necessariamente encontraremos $A = 0$, assim como será nulo o termo que multiplica n .

Continuamos, então, com a obtenção da solução particular $y_p[n]$.

Como $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, escolhemos $y_p[n]$ com a mesma forma de $x[n]$. Como a base da exponencial presente no sinal de entrada não coincide com nenhuma base (modo natural) presente na solução homogênea, podemos escrever¹

$$y_p[n] = B\beta^n u[n].$$

Resta-nos, agora, encontrar β e B . Se $y_p[n]$ também é solução e da ED, então

$$B\beta^n u[n] = -B\beta^{n-1}u[n-1] + 6B\beta^{n-2}u[n-2] + \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Para $n \geq 2$, (já que conhecemos $y[0]$ e $y[1]$) temos

$$B\beta^n = \left(-\frac{B}{\beta}\right)\beta^n + \left(\frac{6B}{\beta^2}\right)\beta^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\left(B + \frac{B}{\beta} - \frac{6B}{\beta^2}\right)\beta^n = 1 \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

A equação acima é satisfeita para $\beta = \frac{1}{2}$ e $\left(B + \frac{B}{\beta} - \frac{6B}{\beta^2}\right) = 1$. Resolvendo essa equação com $\beta = \frac{1}{2}$, encontramos $B = -\frac{1}{21}$.

Logo, para $n \geq 0$, a solução total (ou completa), escrita como $y[n] = y_h[n] + y_p[n]$ é

$$y[n] = A_1(-3)^n + A_2 2^n + \left(-\frac{1}{21}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Como conhecemos as CAs $y[0]$ e $y[1]$ para a ED completa, podemos obter valores de A_1 e A_2 resolvendo o sistema de equações

$$\begin{cases} y[0] = A_1(-3)^0 + A_2 2^0 + \left(-\frac{1}{21}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^0 u[0] \\ y[1] = A_1(-3)^1 + A_2 2^1 + \left(-\frac{1}{21}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^1 u[1] \end{cases}.$$

1. Pode-se fazer $\beta = 2$ de antemão, pois o sistema é linear.
2. Caso se escolha $y_p[n] = A\beta^n u[n] + Bn\beta^n u[n]$, necessariamente encontraremos $A = 0$, assim como será nulo o termo que multiplica n .

Exercício Resolvido 2:

Suponha o problema anterior, mas agora para a entrada $x[n] = (2)^n u[n]$. Nesse caso, percebe-se que o modo $(2)^n$ da entrada já está presente em $y_h[n] = A_1(-3)^n + A_2 2^n$. Assim, a solução completa terá a componente $(2)^n$ convoluída com ela mesma, o que resulta em $(2^n + n2^n)$. Como a componente $(2)^n$ já está presente na solução homogênea, só nos resta modelar a solução particular como^{1,2}

$$y_p[n] = Bn\beta^n u[n].$$

Se $y_p[n]$ também é solução e da ED, então vale que

$$Bn\beta^n u[n] = -B(n-1)\beta^{n-1}u[n-1] + 6B(n-2)\beta^{n-2}u[n-2] + (2)^n u[n].$$

Para $n \geq 2$, chegamos a

$$\beta^n \left(Bn + \frac{Bn}{\beta} - \frac{B}{\beta} - \frac{6Bn}{\beta^2} + \frac{12B}{\beta^2} \right) = 2^n.$$

A equação acima é satisfeita para $\beta = 2$ e $\left(Bn + \frac{Bn}{\beta} - \frac{B}{\beta} - \frac{6Bn}{\beta^2} + \frac{12B}{\beta^2} \right) = 1$. Reescrevendo essa equação como

$$B \left(n \left(1 + \frac{1}{\beta} - \frac{6}{\beta^2} \right) - \frac{1}{\beta} + \frac{12}{\beta^2} \right) = 1$$

e avaliando para $\beta = 2$, temos

$$B \left(n \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{6}{4} \right) - \frac{1}{2} + \frac{12}{4} \right) = 1.$$

Como o termo que multiplica n vale zero, obtém-se $B = \frac{2}{5}$. Continuando, para $n \geq 0$, a solução completa é dada por

$$y[n] = A_1(-3)^n + A_2 2^n + \left(\frac{2}{5} \right) n(2)^n u[n].$$

Os parâmetros A_1 e A_2 são obtidos, como anteriormente, resolvendo-se o sistema de equações com CAs conhecidas:

$$\begin{cases} y[0] = A_1(-3)^0 + A_2 2^0 + \left(\frac{2}{5} \right) (-1)(2)^0 u[0] \\ y[1] = A_1(-3)^1 + A_2 2^1 + \left(\frac{2}{5} \right) (-2)(2)^1 u[1] \end{cases}.$$

1. Pode-se fazer $\beta = 2$ de antemão, pois o sistema é linear.
2. Caso se escolha $y_p[n] = A\beta^n u[n] + Bn\beta^n u[n]$, necessariamente encontraremos $A = 0$, assim como será nulo o termo que multiplica n .