PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-038 Processamento Digital de Sinais 1P25 – **Quinta Lista de Exercícios**

EXERCÍCIO 1

Sabe-se que a amostragem ideal de um sinal de tempo contínuo $x(t) = \cos(\Omega_0 t)$, realizada com período de amostragem $T_{\mathrm{s}} = \frac{1}{200}$ s, resulta na sequência $x[n] = \cos\left[\frac{\pi}{4}n\right]$. No mais, o processo de amostragem não inclui filtro anti-*aliasing*.

a) Determine uma expressão para todos os valores positivos de Ω_0 que satisfazem o enunciado acima.
b) Suponha que o Critério de Nyquist tenha sido respeitado durante o processo de amostragem feito no item (a): determine Ω_0.
c) Suponha que o $x(t)$ encontrado no item (b) seja amostrado com $\hat{f}_{\mathrm{s}} = \frac{200}{9}$ Hz.
   i. Obtenha o $x[n]$ correspondente;
   ii. Obtenha o sinal $x_r(t)$ reconstruído a partir do $x[n]$ do item anterior, através de um conversor digital-analógico (D/A) ideal com período de reconstrução $\hat{T}_r = T_s = 1/200$ s;

   Os resultados acima (dos subitens i e ii) implicam uma violação do **Teorema da Amostragem**?

EXERCÍCIO 2

Deseja-se realizar o sistema a tempo contínuo $y(t) = 3x^2(t)$, **através de um sistema a tempo discreto**. No mais, sobre $x(t)$ sabe-se que:

a) Só tem valores reais;
b) A magnitude de seu espectro de Fourier $X(j\Omega)$ é não nula para $-\Omega_{\mathrm{m}} < \Omega < \Omega_{\mathrm{m}}$ rad/s e nula para $|\Omega| \geq \Omega_{\mathrm{m}}$ rad/s;

Projete um sistema que realize a tarefa desejada, especificando todos os seus componentes (ideais), i.e., filtro anti-*aliasing*, conversor analógico-digital (A/D), sistema discreto, filtro de reconstrução, conversor digital-analógico (D/A), etc. Desconsidere os atrasos de processamento produzidos pelos A/D, D/A e filtros.

EXERCÍCIO 3

Deseja-se processar o sinal de tempo-contínuo $x(t) = \cos^2(400\pi t) + \cos(200\pi t + \pi/5)$ usando um sistema em tempo-discreto. Para tal, $x(t)$ é amostrado idealmente com $f_{\mathrm{s}} = 1000$ Hz para gerar a sequência discreta $x[n]$. O processamento efetuado no tempo discreto é realizado por um sistema LTI causal com $H(z) = (1 - z^{-5})/2$, RDC$_{\mathrm{H}}$: $\{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| > 0\}$.

a) Obtenha $x[n]$.
b) Encontre $y[n]$.
c) Determine uma expressão para $y_{\mathrm{r}}(t)$ reconstruído de $y[n]$ através de um D/A ideal com frequência de reconstrução $f_{\mathrm{r}} = f_{\mathrm{s}}$.
d) Suponha que, para reconstruir $y_{\mathrm{r}}(t)$, só se disponha de um D/A ideal cuja frequência de reconstrução $f_{\mathrm{r}} = f_s/2$. Apesar dessa restrição imposta ao D/A, ainda seria possível reconstruir perfeitamente o $y_{\mathrm{r}}(t)$ obtido no item (c)? Caso verdadeiro, proponha uma modificação na cadeia de processamento para viabilizar tal reconstrução.

EXERCÍCIO 4

Uma estação meteorológica em um dado local mede 3 grandezas: pressão atmosférica (P), a velocidade do vento em uma direção específica (V) e a umidade relativa do ar (U). Por limitações de hardware, P é medida a cada $\frac{3}{2}$ s, V é medida a cada 1s e U é medida a cada $\frac{5}{3}$ s. Especifique sistemas discretos de mudança de taxa de amostragem que modifiquem as séries temporais resultantes da amostragem de P, V, e U de modo a viabilizar a comparação delas entre si.

Considere que:

a) As medidas são instantâneas e foram realizadas por A/D ideais (sem quantização)
b) As primeiras medidas de P, V e U ocorrem no mesmo instante de tempo.

EXERCÍCIO 5

A auto-covariância amostral de uma sequência "causal" determinística $x[n]$ de média zero e L (finito) valores reais é uma função par definida por

$$r[m] = \frac{1}{L} \sum_{n=0}^{L-1-m} x[n]x[n+m].$$

Suponha que $x[n]$ seja uma sequência não nula, de média zero e suporte temporal finito no intervalo $0 \leq n \leq 8$. Nesse caso, só é necessário computar $r[m]$ na faixa $-8 \leq m \leq 8$. Descreva um procedimento que permita calcular $r[m]$ no domínio da frequência, através de um número mínimo de DFTs e IDFTs.

Dica: o somatório acima pode ser feito para $\forall n \in \mathbb{Z}$. Mas graças ao suporte temporal compacto de $x[n]$, pode-se utilizar a faixa limitada mostrada.