PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-038 Processamento Digital de Sinais – 1P24 – **Sexta Lista de Exercícios**

EXERCÍCIO 1

Deseja-se implementar através de um sistema em tempo discreto o sistema analógico (de tempo contínuo): $y(t) = x(3t)$. No mais, sabe-se que é real e seu espectro é nulo para frequências iguais e superiores a 10kHz e não-nulo abaixo desse valor. Especifique uma cadeia de processamento necessária para realizar tal objetivo. Considere como **ideais** todos os seus possíveis elementos constituintes, i.e., conversor analógico-digital, filtro anti-*aliasing*, filtro de reconstrução, conversor digital-analógico, etc. Justifique as suas escolhas de projeto.

EXERCÍCIO 2

Solicitou-se a consultor técnico-científico determinar os valores de uma sequência $x[n]$ a partir da informação sabida que o espectro de Fourier (DTFT) correspondente tem expressão algébrica $X\left(e^{j\omega}\right) = \left(1 + 0{,}9e^{-j\omega}\right)^{-1}$. O consultor resolveu obter $x[n]$ computacionalmente através do seguinte procedimento:

i. Definiu $N = 16$;
ii. Obteve $X[k]$ pela avaliação de $X(e^{j\omega})$ em $\omega = 2\pi k/N$ rad/amostra, com $k = 0, 1, \ldots, N-1$;
iii. Computou a DFT$_{16}$ inversa (através da FFT$_{16}$ inversa) de $X[k]$ e obteve $x[n]$, com $n = 0, 1, \ldots, N-1$.

Os resultados encontrados pelo consultor para $|X[k]|$ e $x[n]$ são mostrados na Figura 1. Como referência, o script de Matlab que ele usou para realizar o procedimento segue em anexo.

Responda:

a) A sequência $x[n]$ encontrada pelo consultor tem o espectro $X(e^{j\omega})$ informado no problema?

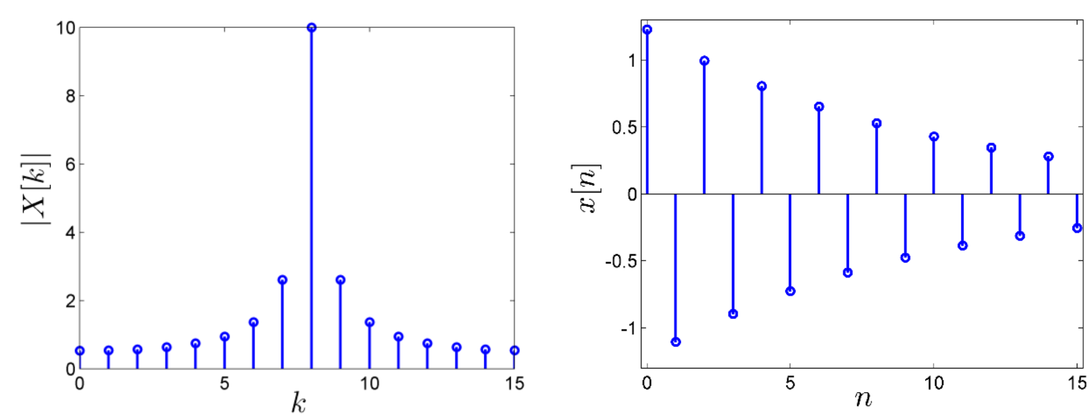

Figura 1. Módulo de $X[k]$ (DFT$_{16}$) e sequência estimada $x[n]$ obtida pela IDFT$_{16}$ inversa de $X[k]$.

EXERCÍCIO 3

Responda sucintamente:

a) Existe a DFT_{16} da sequência $x[n] = \left(\frac{10}{9}\right)^{-n} u[n]$?
b) Como se relacionam a DTFT e DFT_N de uma sequência $x[n]$ de $L < N$ amostras?
c) O quê é o recurso de *zero-padding* no uso da DFT_N e qual o seu efeito sobre o espectro resultante?
d) Cite uma vantagem e uma desvantagem da FFT_N (radix-2) sobre a DFT_N.

EXERCÍCIO 4

Deseja-se computar **um período** da Série de Fourier c_k de uma sequência não-nula $x[n] = x[n+P], \forall n \in \mathbb{Z}$, com período fundamental $P = 500$ amostras. É possível resolver o problema usando apenas 1 multiplicador real uma FFT de $N = 2^m$ pontos?

EXERCÍCIO 5

Demonstre o Teorema de Conservação de Energia (ou de Parseval) para a DFT_N:

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

para $x[n]$ de valores complexos e periódica com período fundamental N.

EXERCÍCIO 6

Deseja-se obter as DFTs de N pontos de duas sequências de valores reais, $x_1[n]$ e $x_2[n]$, cada uma com $N = 1024$ amostras. É possível encontrar os espectros desejados usando uma cadeia de processamento que envolva apenas uma FFT de N pontos, além de manipulações triviais (adição, escalamento, etc.) sobre as sequências envolvidas? Caso possível, proponha tal cadeia de processamento.

EXERCÍCIO 7

A resposta impulsiva de um filtro digital passa-baixas ideal não-causal com frequência de corte $\omega = \omega_c$ rad/amostra é dada por

$$h_{pb}[n] = \frac{\omega_c}{\pi}\delta[n] + \frac{1}{\pi n}\mathrm{sen}[\omega_c n]u[n-1] + \frac{1}{\pi n}\mathrm{sen}[\omega_c n]u[-n-1].$$

a) Mostre que a resposta impulsiva de um filtro digital passa-altas não-causal com frequência de corte $\omega = \omega_c$ rad/amostra é dada por

$$h_{pa}[n] = \begin{cases} 1 - \dfrac{\omega_c}{\pi}, & n = 0 \\ \dfrac{-1}{\pi n}\mathrm{sen}[\omega_c n] & n \neq 0 \end{cases}$$

b) Desenhe a magnitude da resposta em frequência de $h_{pa}[n]$ no intervalo $\pi \leq \omega \leq 2\pi$ rad/amostra.

EXERCÍCIO 8

Considere o filtro FIR do tipo IV com resposta impulsiva dada por

$$h[n] = \sum_{m=0}^{5} b_m \delta[n-m].$$

a) Obtenha a resposta em frequência do filtro na forma $H\left(e^{j\omega}\right) = F(\omega)A(\omega)$, onde $F(\omega)$ é o termo de fase e $A(\omega)$ é um termo real de amplitude.
b) O filtro dado pode ser um passa-baixas?

ANEXO

```
% Script de matlab do Exercício 2
clear all; close all
% Expressão algébrica para a DTFT de x[n]: X(e^(jw))=(1+0.9e^(-jw))^(-1)
% A DFT de tamanho N de x[n] é a avaliação de X(e^(jw))em w=2pik/N

N=16; % número de pontos da DFT
k=0:N-1; wk=2*pi*k/N; % intervalo de 0 a 2pi amostrado a cada 2pi/N rad
por amostra.
% DFT pela amostragem da DTFT
X=(1+0.9*exp(-1i.*wk)).^(-1); % Avaliação da X(e^(jw)) em w = wk
x=real(ifft(X,N)); % Obtenção x[n] pela DFT inversa (ou IFFT) de N pontos

% Apresentação dos resultados
figure; stem(k,abs(X), 'linewidth', 2); % Plota X[k]
set(gca,'fontsize',14); xlabel('$k$','interpreter','latex','fontsize',17);
ylabel('$|X[k]|$','interpreter','latex','fontsize',17); axis tight

figure; n=0:N-1; stem(n,x,'linewidth', 2)
set(gca,'fontsize',14); xlabel('$n$','interpreter','latex','fontsize',17);
ylabel('$x[n]$','interpreter','latex','fontsize',17);
axis ([-.2 15.2 -1.3 1.3]);
```