

## PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-032 Sistemas Lineares 4P24 – Nona Lista de Exercícios

Notação:  $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  (vetor de estados)

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$  (vetor de entrada)

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$  (vetor de saída)

$n$ : ordem do sistema

### EXERCÍCIO 1

Considere o SLIT SISO causal a tempo discreto com equações de estado e saída abaixo:

$$\begin{cases} \mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k), & \mathbf{x}(0) \neq 0, & k \geq 0 \\ \mathbf{y}(k) = \mathbf{C}_i\mathbf{x}(k) & & k \geq 0 \end{cases}$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}, \mathbf{C}_1 = [0 \quad 1] \text{ e } \mathbf{C}_2 = [1 \quad 0].$$

- Determine os auto-valores da matriz  $\mathbf{A}$  e suas respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.
- Para cada  $\mathbf{C}_i$  dado, determine se o SLIT é completamente observável.
- Para cada  $\mathbf{C}_i$  tal que o SLIT seja completamente observável, encontre os 5 primeiros elementos da saída  $y(k)$ , para  $k = 0, 1, 2, \dots, 4$ , sabendo que os 2 primeiros elementos da saída observada são  $[y(0) \ y(1)]^T = [3 \quad 5]^T$ .
- Verifique experimentalmente o resultado do item (c), através de uma simulação computacional.

### EXERCÍCIO 2

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo ou discreto, com REE tal que a matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  está na forma normal de Jordan e tem auto-valor  $\lambda$  de multiplicidade algébrica  $n$  e multiplicidade geométrica igual a 1. No mais a matriz  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  tem colunas  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^{p \times 1}$ , com  $i = 1, 2, \dots, n$ , i.e.,  $\mathbf{C} = [\mathbf{c}_1 \ \mathbf{c}_2 \ \dots \ \mathbf{c}_n]$ . Mostre o SLIT é completamente observável se, e somente se  $\mathbf{c}_1 \neq 0$ .

### EXERCÍCIO 3

Generalize o resultado do exercício 2 para uma matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  na forma normal de Jordan, com auto-valor  $\lambda$  de multiplicidade algébrica  $n$  e multiplicidade geométrica 2, i.e.,  $\mathbf{A}$  é bloco diagonal com dois blocos de Jordan, em particular, um de dimensão  $q$  e outro de dimensão  $n - q$ . Mostre o SLIT é completamente observável se, e somente se  $\mathbf{c}_1$  e  $\mathbf{c}_{q+1}$  são não nulos e linearmente independentes.

### EXERCÍCIO 4

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo discreto, com equações de estado e saída abaixo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 3 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k)$$

- O SLIT é completamente observável?
- O SLIT homogêneo é marginalmente estável?

### EXERCÍCIO 5

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo, com equação de estado abaixo, onde  $b_{ij}$  e  $c_{ij}$  são reais não-nulos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{bmatrix} \mathbf{x}(t)$$

- É possível encontrar  $c_{ij}$  tais que o SLIT seja completamente observável? Caso seja, mostre um exemplo.

## EXERCÍCIO 6

Considere o SLIT SISO causal, a tempo discreto, com equação de estado abaixo, onde  $b_i, c_i, \lambda_1, \alpha, \beta, \gamma$  e  $\sigma$  são reais não-nulos. Ademais,  $\alpha \neq \gamma$  e  $\beta \neq \sigma$ :

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

$$\mathbf{y}(k) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5] \mathbf{x}(k)$$

b) Mostre que o SLIT é completamente observável se, e somente se, as três condições abaixo forem simultaneamente atendidas:

- i.  $c_1 \neq 0$
- ii.  $c_2$  **ou**  $c_3$  forem não-nulos
- iii.  $c_4$  **ou**  $c_5$  forem não-nulos