PÓS-GRADUAÇÃO EM MODELAGEM COMPUTACIONAL

GA-032 Sistemas Lineares 4P24 – **Oitava Lista de Exercícios**

Notação: $t \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{Z}$

$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ (vetor de estados)

$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ (vetor de entrada)

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ (vetor de saída)

n: ordem do sistema

EXERCÍCIO 1

Considere o SLIT SISO causal a tempo discreto com equação de estado abaixo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k) + \mathbf{B}_i u(k), \quad \mathbf{x}(0) \neq 0, \qquad k \geq 0$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \; e \; \mathbf{B}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

a) Determine os auto-valores da matriz $\mathbf{A}$ e suas respectivas multiplicidades algébrica e geométrica.
b) Para cada $\mathbf{B}_i$ dado, determine se o SLIT é completamente controlável.
c) Para cada $\mathbf{B}_i$ tal que o SLIT seja completamente controlável, encontre a entrada $u(k)$ mais curta que leve o estado à origem, a partir de $\mathbf{x}(0) = [2 \quad 1]^\top$.
d) Verifique experimentalmente o resultado do item (c), através de uma simulação computacional.

EXERCÍCIO 2

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo ou discreto, com REE tal que a matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ está na formal normal de Jordan e tem auto-valor λ de multiplicidade algébrica n e multiplicidade geométrica igual a 1. No mais a matriz $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tem linhas $\mathbf{b}_i \in \mathbb{R}^{1 \times m}$, com $i = 1,2, \dots, n$, i.e., $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_n \end{bmatrix}$. Mostre o SLIT é completamente controlável se, e somente se $\mathbf{b}_n \neq 0$.

EXERCÍCIO 3

Generalize o resultado do exercício 2 para uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ na formal normal de Jordan, com auto-valor λ de multiplicidade algébrica n e multiplicidade geométrica 2, i.e., $\mathbf{A}$ é bloco diagonal com dois blocos de Jordan, em particular, um de dimensão q e outro de dimensão $n-q$. Mostre o SLIT é completamente controlável se, e somente se $\mathbf{b}_q$ e $\mathbf{b}_n$ são não nulos e linearmente independentes.

EXERCÍCIO 4

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo discreto, com equação de estado abaixo:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

a) Determine quais são e as correspondentes multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{7\times 7}$.
b) O SLIT é completamente controlável?
c) Desenhe um diagrama de fluxo de uma implementação do SLIT MIMO que corresponda à REE dada. Considere que a saída do SLIT é $\mathbf{x}(k)$.
d) Determine os pontos de equilíbrio do SLIT homogêneo.
e) O SLIT homogêneo é marginalmente estável?

EXERCÍCIO 5

Considere o SLIT MIMO causal, a tempo contínuo, com equação de estado abaixo, onde b_{ij} são reais não-nulos:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \\ b_{41} & b_{42} \\ b_{51} & b_{52} \end{bmatrix} \mathbf{u}(t)$$

a) Determine quais são e as correspondentes multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times 5}$.
b) O SLIT é completamente controlável?

EXERCÍCIO 6

Considere o SLIT SISO causal, a tempo discreto, com equação de estado abaixo, onde b_i, $\lambda_1, \alpha, \beta, \gamma$ e σ são reais não-nulos. Ademais, $\alpha \neq \gamma$ e $\beta \neq \sigma$:

$$\mathbf{x}(k+1) = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta & 0 & 0 \\ 0 & -\beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma & \sigma \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma & \gamma \end{bmatrix} \mathbf{x}(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \\ b_5 \end{bmatrix} \mathbf{u}(k)$$

a) Determine quais são e as correspondentes multiplicidades algébrica e geométrica dos autovalores da matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{5\times5}$.

b) Mostre que o SLIT é completamente controlável se, e somente se, as três condições abaixo forem simultaneamente atendidas:

   i. $b_1 \neq 0$

   ii. b_2 ou b_3 forem não-nulos

   iii. b_4 ou b_5 forem não-nulos