

ANÁLISE I – FGV
SEXTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Monitor: Marcos Antonio Alves

Data de entrega: **10 de março de 2025**

Exercício 1. Sejam f e g funções de $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, diferenciáveis em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Mostre, usando a definição de derivadas que $(f+g)'(\mathbf{x}) = f'(\mathbf{x}) + g'(\mathbf{x})$. Seja $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$ também diferenciável em $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Mostre usando a definição de derivadas que $(hg)'(\mathbf{x}) = h'(\mathbf{x})g(\mathbf{x}) + h(\mathbf{x})g'(\mathbf{x})$.

Exercício 2. Seja $Q = (0, 1) \times (0, 1)$. Suponha que $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, e $g : Q \rightarrow \mathbb{R}$ sejam diferenciáveis em Q . Mostre que se $f'(\mathbf{x}) = g'(\mathbf{x})$ para todo $\mathbf{x} \in Q$, então existe constante c tal que $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) + c$ para todo $\mathbf{x} \in Q$.

Exercício 3. Seja $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ função contínua em B , diferenciável no interior de B e tal que $f \equiv 0$ na fronteira de B . Mostre que f tem ponto crítico no interior de B .

Exercício 4. Considere para $i = 1, \dots, n$ os pontos $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$, e seja $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $p(x) = ax^2 + bx + c$ tal que a, b e c minimizam o erro $\sum_{i=1}^n |p(x_i) - y_i|^2$. Mostre que a, b e c satisfazem as equações

$$\begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n x_i y_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned}$$

Exercício 5. Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ compacto, e A° o conjunto dos pontos interiores de A . Seja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciável, com derivadas contínuas em A° , e f contínua em A . Suponha ainda que f se anule em toda a fronteira de A , e que f'' seja negativa definida para todo ponto em A° . Mostre que $f(\mathbf{x}) > 0$ para todo $\mathbf{x} \in A^\circ$.

Exercício 6. Sejam as funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ duas vezes diferenciáveis, com as segundas derivadas contínuas. Suponha que o zero seja ponto de mínimo estrito de f e g , e

que $f(0) = g(0) = 1$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $\varphi(x, y) = f(x)g(y)$. O que podemos afirmar sobre a Hessiana de φ em $(0, 0)$ (nada pode ser afirmado, ela é indefinida, positiva definida, positiva semi-definida, negativa definida, etc)? O que podemos afirmar sobre o ponto $(0, 0)$ em relação à φ (nada pode ser afirmado, é ponto de máximo, de máximo estrito, de mínimo, de mínimo estrito, de sela, etc)? Justifique suas respostas.