

ANÁLISE I – FGV
QUINTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Monitor: Marcos Antonio Alves

Data de entrega: **28 de fevereiro de 2025**

Exercício 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Calcule $f'(0)$.

Exercício 2. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \sum_{i=1}^n (x - c_i)^2,$$

onde $c_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, \dots, n$, e $n \in \mathbb{N}$. Ache um ponto de mínimo local de f . Mostre que é único.

Exercício 3. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ função diferenciável em $\mathbb{R}$ e tal que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é injetiva.

Exercício 4. Mostre que se I é um intervalo e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com derivada limitada em I , então f é de Lipschitz.

Exercício 5. Sejam $a < b$, e $x_0, x_1, \dots, x_N$ pontos tais que $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$. Mostre que se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é diferenciável e tem derivada contínua em $[a, b]$, então existe uma constante $M \in \mathbb{R}$ independente de N tal que

$$\sum_{i=1}^N |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq M.$$

(Obs: dizemos neste caso que f tem *variação limitada*.)

Exercício 6. Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ quatro vezes diferenciável, com a quarta derivada contínua, numa vizinhança aberta de $x \in I$. Mostre então que existem constantes positivas δ e c tal que

$$\left| f''(x) - \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \right| \leq ch^2,$$

para todo $0 < h < \delta$. Mostre que a constante c pode ser escolhida independentemente de h . A forma acima é utilizada para aproximar $f''(x)$, quando f é suave.