ANÁLISE I – FGV
QUARTA LISTA

Prof. Alexandre Madureira
Monitor: Marcos Antonio Alves
Data de entrega: **21 de fevereiro de 2025**

Exercício 1. Sejam f, $g : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Mostre de duas formas diferentes que o conjunto $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : f(\mathbf{x}) > g(\mathbf{x})\}$ é aberto em $\mathbb{R}^m$.

Exercício 2. Seja $K \subset \mathbb{R}^m$ conjunto compacto e $f : K \to \mathbb{R}^n$ contínua, e seja $\big(\mathbf{x}_j\big)$ sequência contida em K. Mostre que a sequência $\big(f(\mathbf{x}_j)\big)$ possui subsequência convergente com limite contido em $f(K)$.

Exercício 3. Sejam $\Omega \subseteq \mathbb{R}^m$ fechado e limitado, e $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ contínua em Ω. Sem usar Heine–Borel, mostre que $f(\Omega)$ é fechado e limitado.

Exercício 4. Sejam V e W dois espaços vetoriais normados, e $T : V \to W$ uma aplicação linear. Mostre que

(1) T é contínua em V se e somente se T é contínua em $\mathbf{0}$
(2) T é contínua em V se e somente se T é limitada (i.e., $T \in \mathcal{L}(V, W)$)
(3) se V e W têm dimensão finita, então T é contínua

Exercício 5. Mostre que o produto de duas funções uniformemente contínuas e limitadas é função uniformemente contínua.

Exercício 6. Seja $B \subseteq \mathbb{R}^m$ limitado, e $\boldsymbol{f} : B \to \mathbb{R}^n$ uniformemente contínua. Mostre que $\boldsymbol{f}$ é limitada em B. Mostre que esta conclusão não é necessariamente verdadeira se B não for limitado.