ANÁLISE I – FGV
TERCEIRA LISTA

Prof. Alexandre Madureira
Monitor: Marcos Antonio Alves
Data de entrega: **07 de fevereiro de 2025**

Exercício 1. Mostre sem usar o Teorema de Heine–Borel que $\{0, 1, 1/2, 1/3, 1/4, \dots\}$ é compacto.

Exercício 2. Seja K conjunto compacto, e seja $\epsilon > 0$. Mostre que existem $J \in \mathbb{N}$ e pontos $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_J$ pertencentes a K tais que

$$K \subseteq \cup_{j=1}^{J} B_\epsilon(\mathbf{x}_j).$$

Exercício 3. Mostre, sem usar o Teorema de Heine–Borel, que se K é compacto e $F \subseteq K$ é fechado, então F é compacto.

Exercício 4. Seja $C \subseteq \mathbb{R}^n$ não-vazio, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, e $A = \{\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| : \mathbf{x} \in C\}$. Mostre que existe o ínfimo de A, e que

$$\inf A = 0 \iff \text{existe sequência em } C \text{ convergente para } \mathbf{y}.$$

Exercício 5. Dizemos que uma sequência $(\mathbf{x}_j)$ no $\mathbb{R}^n$ tem *variação limitada* se a sequência (v_k) de reais definida por

$$v_k = \sum_{i=1}^{k} \|\mathbf{x}_{i+1} - \mathbf{x}_i\|$$

converge. Mostre que toda sequência de variação limitada é convergente.

Exercício 6. Seja $S \subset \mathbb{R}^n$. Mostre que $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de S se e somente se existe sequência de pontos $(\mathbf{x}_j)$ em $S \backslash \{\mathbf{x}\}$ que converge para $\mathbf{x}$.