ANÁLISE I – FGV
SEGUNDA LISTA

Prof. Alexandre Madureira

Monitor: Marcos Antonio Alves

Data de entrega: **31 de janeiro de 2025**

Exercício 1. Apresente um exemplo para cada uma das situações abaixo:

(a) Um conjunto fechado, não vazio, e sem pontos de acumulação. Por que isto não contradiz o Teorema 2.3.9?

(b) Um conjunto não enumerável, tal que todo ponto dele é ponto de fronteira

(c) Um conjunto não fechado que seja união de fechados

Exercício 2. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Mostre que A é fechado se e somente se $A = \bar{A}$.

Exercício 3. Seja $A \subseteq \mathbb{R}^n$ e A' conjunto dos pontos de acumulação de A. Mostre que A' é fechado. Seja $\bar{A}$ o fecho de A, ver Exercício 2.36. Mostre que $\bar{A} = A \cup A'$. Mostre que $(\bar{A})' = A'$, isto é, o conjunto dos pontos de acumulação de A e $\bar{A}$ são iguais.

Exercício 4. Mostre que um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação de $A \subset \mathbb{R}^n$, e $\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_k \in A$, então $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de $A \backslash \{\mathbf{a}_1, \dots \mathbf{a}_k\}$.

Exercício 5. Mostre que um ponto $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ é ponto de acumulação de A se e somente se toda vizinhança aberta de $\mathbf{x}$ contém infinitos pontos de A.

Exercício 6. Seja $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ conjunto aberto para todo $i \in \mathbb{N}$. Decida se as afirmativas abaixo são verdadeiras ou falsas, e prove sua resposta:

(1) Se $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de $\cap_{i \in \mathbb{N}} A_i$, então $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de A_i para todo $i \in \mathbb{N}$.

(2) Se $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de $\cup_{i \in \mathbb{N}} A_i$, então $\mathbf{x}$ é ponto de acumulação de A_i para algum $i \in \mathbb{N}$.