

Processamento Digital de Sinais para Análise Tempo-Frequência

Aplicações em Áudio

Paulo A. A. Esquef¹

¹Coordenação de Sistemas e Controle
Laboratório Nacional de Computação Científica (LNCC)

17.02 a 21.02.2014 / Programa de Verão do LNCC



- 1 Introdução
 - Motivação
 - Definições Importantes
- 2 Amostragem de Sinais Contínuos
 - Definições Elementares
 - Formalização Matemática
 - Interpretação Gráfica
 - Conversão Digital-Analógica
 - Critério de Nyquist
- 3 Representação Frequencial de Sinais
 - Representações de Fourier







Análise de Sinais

De que se trata?

- **Sinal**: em geral, **função** de diversas variáveis
 - Ênfase: sinais não-estacionários no **tempo**
- **Análise** de sinal: estudo e caracterização de suas propriedades e/ou decomposição em componentes elementares (simples)
 - Domínios de interesse: no tempo, na frequência ou conjuntamente em tempo-frequência
 - Métodos: não-paramétricos (expansão em bases) e paramétricos (envolve modelo gerador subjacente)

Análise de Sinais no Domínio Tempo-Frequência

Motivação

- Sinais de interesse prático são **não-estacionários**
 - Características espectrais (conteúdo frequencial) mudam ao longo do tempo (ou domínio de interesse)
- **Análise Tempo-Frequência:** permite rastrear a evolução do conteúdo espectral ao longo do tempo
- **Exemplo:** Espectros de uma varredura senoidal vs de ruído branco Gaussiano
 - Varredura Senoidal (0 a 4 kHz)   
 - Ruído branco Gaussiano (0 a 4 kHz)   

Funções Trigonométricas

- $\cos(\varphi)$, $\sin(\varphi)$, $e^{j\varphi}$
 - φ é ângulo, expresso em radiano ou grau.
 - $j = \sqrt{-1}$ é a unidade imaginária.
 - O argumento φ pode variar com o tempo.
Ex.: $s(t) = \cos(\varphi(t))$.
 - A função $\varphi(t)$ é chamada de fase.
Ex. $\varphi(t) = \omega t$ (fase linear).
- **Identidade de Euler: $e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j\sin(\varphi)$.**
 - $\cos(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}}{2}$.
 - $\sin(\varphi) = \frac{e^{j\varphi} - e^{-j\varphi}}{2j}$.

Frequência em Sinais Senoidais

- É número de períodos (ciclos de oscilação) por unidade de tempo.
- Taxa de variação da fase em relação ao tempo.
- Unidades: Hz ou rad/s
- 1 Hertz = 1 ciclo por segundo
- $\omega_{\text{rad/s}} = 2\pi f_{\text{Hz}}$
- $s(t) = \cos(\omega t)$, com fase em rad: ω é frequência em rad/s.

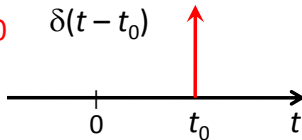
“Funções” Delta

Dirac e Kronecker

- Delta de Dirac ($t \in \mathbb{R}$)

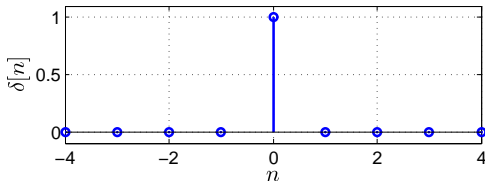
$$\delta(t - t_0) = 0, \text{ para } (t - t_0) \neq 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) dt = 1$$



- Delta de Kronecker ($n \in \mathbb{Z}$)

$$\delta[n] = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



Convolução Linear

Casos contínuo e discreto

- Caso Contínuo

$$(g * f)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau) f(t - \tau) d\tau$$

- Caso Discreto

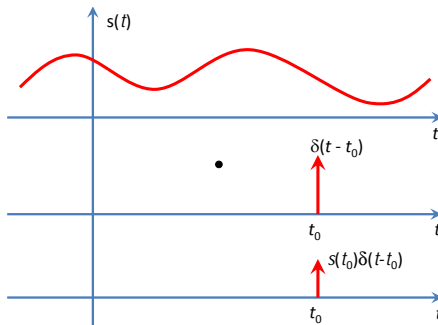
$$(g * f)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k] f[n - k]$$

Multiplicação com Delta

Amostragem ou Peneiragem

- Multiplicação com Delta (Amostragem)

$$s(t)\delta(t - t_0) = s(t_0)\delta(t - t_0)$$

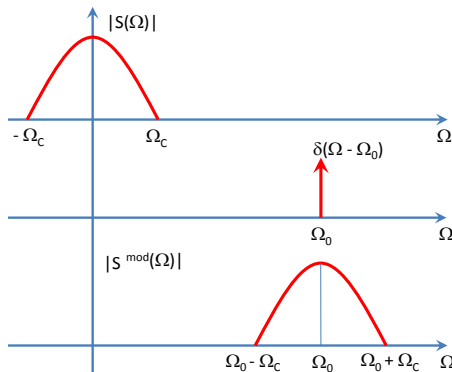


Convolução com Delta

Deslocamento

- Convolução com Delta (Deslocamento)

$$S(\Omega) * \delta(\Omega - \Omega_0) = S(\Omega - \Omega_0)$$



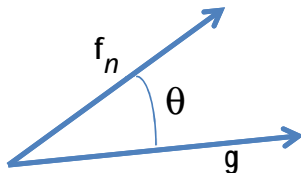
Convolução como Projeção

Caso Discreto

- $(g * f)[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]f[n-k]$
- Vetorialmente (fazendo $\hat{f}[n] = f[-n]$)

$$(g * \hat{f})[n] = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f}_n \rangle = \|\mathbf{g}\| \|\mathbf{f}_n\| \cos(\theta)$$

- Graficamente



Amostragem Uniforme de Sinais Contínuos

Caso Unidimensional

- **Sinal Analógico:** domínio e contra-domínio contínuos (definidos em \mathbb{R})
- **Sinal Digital:** domínio e contra-domínio discretos (conjunto enumerável de valores)
- **Sinal Discreto:** domínio em \mathbb{Z} e contra-domínio em \mathbb{R} (sem quantização da imagem)
- **Conversor Analógico-Digital (A/D):** realiza a conversão de um sinal analógico para um sinal digital
 - Discretização do domínio: Amostragem
 - Discretização do contra-domínio (imagem): Quantização
- **Conversor Digital-Analógico (D/A):** reconstrói um sinal analógico a partir de um sinal digital

Amostragem Uniforme de Sinais Reais Contínuos

Formalização para o Caso Unidimensional

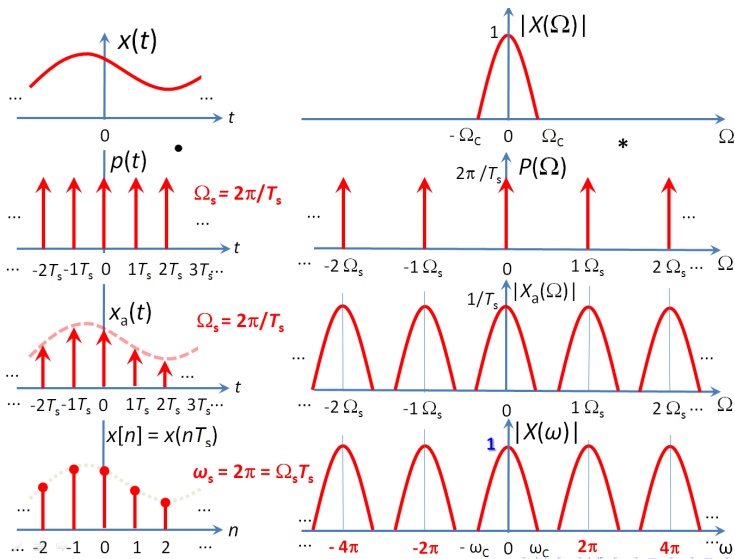
- Para um dado período T de amostragem e $n \in \mathbb{Z}$

$$x[n] = x(t)|_{t=nT}$$

- Sob que condições pode-se garantir a recuperação sem perdas de $x(t)$ a partir de $x[n]$?
 - **Teorema da Amostragem** oferece a resposta
 - Fundamentação do Teorema da Amostragem: Efeito espectral do processo de amostragem

Amostragem Ideal

Multiplicação de $x(t)$ por um Trem de Impulsos Periódico: $x_a(t) = x(t)p(t)$



Amostragem Ideal

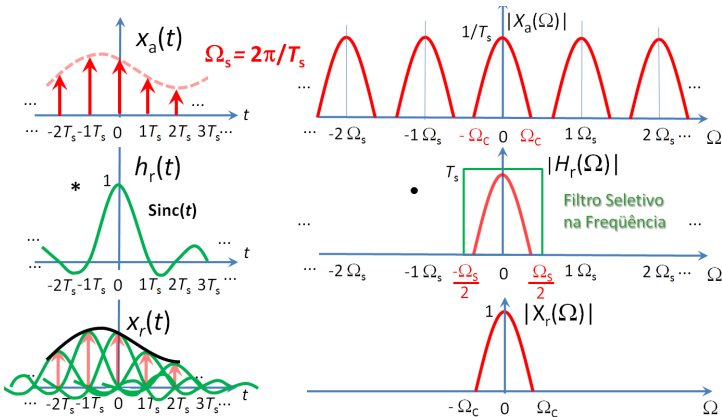
Efeitos Espectrais

- $X_a(\Omega)$ é constituído por réplicas de $X(\Omega)$ centradas em múltiplos inteiros Ω_s
- Espectro do sinal amostrado é **Periódico** com período $\Omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$
- Como o espectro de sequências tem período 2π rad/amostra, realiza-se um escalamento no eixo de frequências para levar $\Omega_s \rightarrow \omega_s = 2\pi$ rad/amostra

Reconstrução de $x(t)$ a partir de $x[n]$



Interpretação Espectral

- Dois estágios:
 - Filtragem Seletiva Analógica Ideal: para selecionar apenas um período de $X(\omega)$, centrado em $\omega = 0$
 - Escalação frequencial: para levar $\omega_s \rightarrow \Omega_s$ rad/s



Garantia de Reconstrução Perfeita

Critério de Nyquist em Condições Ideais

- $x(t)$ tem que ser limitado em banda, i.e., $X(\Omega) = 0, |\Omega| \geq \Omega_c$
- $\Omega_s \geq 2\Omega_c$: Critério de Nyquist (CN)
- Na prática:
 - Evitar o limite mínimo do CN para compensar a não-idealidade dos processos de amostragem (A/D) e reconstrução (D/A)
 - Sistema de amostragem (A/D) com Ω_s inclui um filtro passa-baixas analógico real com frequência de corte $\Omega_c = \frac{\Omega_s}{2}$
- **Violação do CN produz *Aliasing*** (sobreposição das réplicas espectrais) e a reconstrução perfeita de $x(t)$ é perdida
- Exemplo: Voz (freq. até 8 kHz) + componente FM em 17,5 kHz
 - Amostragem com 48 kHz (máx. freq. representável 24 kHz) 
 - Amostragem com 16 kHz (máx. freq. representável 8 kHz) 
 - A componente em 17,5 kHz vai aparecer centrada em $|8,0 - (17,5 - 8,0)|$ kHz = 1,5 kHz

Representação Espectral (Fourier)

Visão Intuitiva

- **Objetivo:** Saber das frequências presentes em $s(t)$.
- **Proposição de Fourier:** Projetar $s(t)$ sobre uma função $\phi(t)$ que só possua uma única frequência.
- **Escolha conveniente:** $\phi(t) = e^{j\omega_0 t}$
- **Formulação (Análise)**

$$S(\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) e^{-j\omega_0 \tau} d\tau$$

- $|S(\omega_0)| \neq 0$ indica da presença $e^{j\omega_0 t}$ em $s(t)$.
- Avaliando $S(\omega_0)$ para $-\infty \leq \omega_0 \leq \infty$ obtém-se a caracterização frequencial por todo o espectro.

Representações de Fourier

CTFT – Formalização no Tempo Contínuo, $t \in \mathbb{R}$

- **Equação de Síntese**

$$s(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

- **Equação de Análise**

$$S(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- $S(\Omega)$ é uma função complexa, i.e., $S : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$, logo, tem módulo e fase



Representações Espectral (Fourier)

Funções Senoidais

- **Estudo de Caso:** $s(t) = e^{j\omega_0 t}$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j(\omega_0 - \omega)t} dt$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos((\omega_0 - \omega)t) dt + j \int_{-\infty}^{\infty} \sin((\omega_0 - \omega)t) dt$$

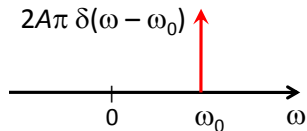
$$S(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega_0 \neq \omega \\ \infty, & \omega_0 = \omega \end{cases}$$

Representações Espectral (Fourier)

Funções Senoidais

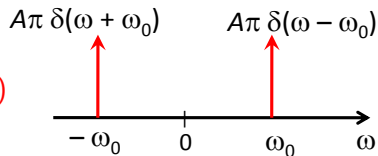
- $s(t) = Ae^{j\omega_0 t}$ tem espectro

$$S(\omega) = 2A\pi\delta(\omega - \omega_0)$$



- $s(t) = A\cos(\omega_0 t)$ tem espectro

$$S(\omega) = A\pi\delta(\omega - \omega_0) + A\pi\delta(\omega + \omega_0)$$



Representações de Fourier

CTFT – Três Propriedades Úteis

- **Convolução no tempo:** $s_1(t) * s_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_1(\omega) S_2(\omega)$
- **Multiplicação no tempo:** $s_1(t) s_2(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S_1(\omega) * S_2(\omega)$
- **Modulação:** $e^{j\omega_0 t} s(t) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} S(\omega - \omega_0)$

Representações de Fourier

DTFT – Formalização no Tempo Discreto $n \in \mathbb{Z}$

- **Equação de Síntese**

$$s[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{j\omega n} d\omega$$

- **Equação de Análise**

$$S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n] e^{-j\omega n}$$

- $S(\omega)$ é uma função complexa, i.e., $S: \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$
- $S(\omega)$ é uma função **PERIÓDICA** (com período 2π rad/amostra)

Representações de Fourier

Observações

- Propriedades da CTFT são similares às da DTFT
- **Sinais Periódicos:** $s(t) = s(t + T_0)$ ou $s[n] = s[n + N_0]$
 - Representação via a chamada **SÉRIE de Fourier**
 - Espectros $S(\omega)$ de sinais periódicos: combinação linear de deltas de Dirac centrados em múltiplos inteiros da frequência fundamental $\omega_0 = 2\pi/T_0$
 - Basta conhecer ω_0 e as áreas dos deltas (proporcionais aos coeficientes c_k da Série de Fourier)
- Equação de síntese (tempo contínuo):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt}$$

Representações de Fourier

Mais Observações

- Interpretação da Equação de Síntese (sinais periódicos):

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{j\omega_0 kt} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi_k(t)$$

- Expansão (representação ou decomposição ou análise) de $s(t)$ em termos mais simples $\phi_k(t)$ (exponenciais complexas)
- Nesse caso: as funções $\phi_k(t)$ são ortogonais
 $\langle \phi_i(t), \phi_j(t) \rangle = 0, \forall i \neq j$, i.e., formam uma base
- Outras expansões ou transformações (Taylor, DCT, Wavelets, Karhunen-Loève, etc.) usam abordagens similares: mudam os $\phi_k(t)$ e c_k .

Representações de Fourier

Tratamento Computacional

- **Computador: não processa sinais contínuos**, mas sequência de números (conjunto enumerável)
- Espectro de sinais periódicos: **a representação em Série de Fourier viabiliza a manipulação computacional**
- Em geral, uma sequência $s[n]$ tem DTFT ou espectro $S(\omega)$ contínuo e periódico com 2π rad/amostra.
 - Algum processo de discretização de $S(\omega)$ se faz necessário para viabilizar processamento computacional no domínio espectral

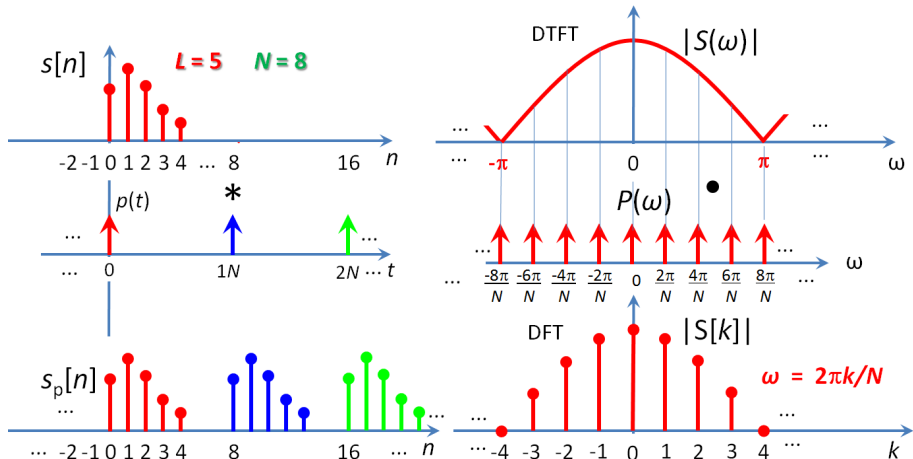
Representações de Fourier

DFT – Discrete Fourier Transform

- Sequências $s[n]$ com **Suporte Finito** (duração finita de L) amostras podem ser feitos artificialmente periódicos com período $N \geq L$
- Pode-se construir $s_p[n] = \sum_i s[n + iN]$
- $s_p[n]$ admite espectro por Série de Fourier e, logo, tratamento computacional na frequência
- Espectro de $s_p[n]$: amostragem de um período (intervalo de 2π rad/amostra) de $S(\omega)$ em N partes iguais.
- Amostragem da DTFT em N partes iguais: DFT_N de N pontos
- DFT_N : $S[k] = S(\omega)|_{\omega=\frac{2\pi k}{N}}$, com $k = 0, 1, 2, \dots, N-1$

Representações de Fourier

DTFT vs DFT – Interpretação Gráfica



Representações de Fourier

FFT – Fast Fourier Transform

- **FFT:** Família de algoritmos rápidos para computar a DFT_N de uma sequência de duração finita
- **Restrição:** $N = 2^m$
- Economia computacional (em termos de multiplicações complexas)
 - $DFT_N: \mathcal{O}(N^2)$
 - $FFT_N: \mathcal{O}\left(\frac{N}{2} \log_2 N\right)$

1 Transformada- \mathcal{Z}

- Definição e Propriedades
- Relação com Modelos MA e AR

2 ATF via Métodos Não-Paramétricos

- Short-Time Fourier Transform (STFT)

Transformada- \mathcal{Z}

Definição

- Generalização da DTFT (espectro de Fourier de sequências)
- Projeção de $s[n]$ sobre a função $\phi_{r,\omega}[n] = (re^{j\omega})^n$, com $r \geq 0 \in \mathbb{R}$ e $\omega \in \mathbb{R}$
- Para DTFT particulariza-se para $r = 1$ (circunferência unitária)
- Por simplicidade notacional, faz-se $z = re^{j\omega}$, que varre todo o plano complexo
- **Definição:**

$$s[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s[n]z^{-n}$$

- $S(z)$ é uma Série de termos complexos (Laurent): $S : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$
- $S(z)$ nem sempre converge
- Quando $S(z)$ converge a região de convergência é tipicamente em um anel centrado na origem do plano complexo

Propriedades e Pares $s[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S(z)$ Úteis

- **Delocamento Temporal:** $s[n - n_0] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} z^{-n_0} S(z)$
- **Linearidade:** $as_1[n] + bs_2[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} aS_1(z) + bS_2(z)$
- **Convolução no tempo:** $(s_1 * s_2)[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S_1(z)S_2(z)$
- **Modulação:** $z_0^n s[n] \xleftrightarrow{\mathcal{Z}} S\left(\frac{z}{z_0}\right)$
- Em geral, $S(z)$ pode ser escrita como uma razão de polinômios em z : $S(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$

Transformada- \mathcal{Z} e Modelos MA

- Visão de sistemas lineares: entrada $x[n]$ e saída $y[n]$
- Modelo MA (*Moving-Average*) de ordem M :

$$y[n] = \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

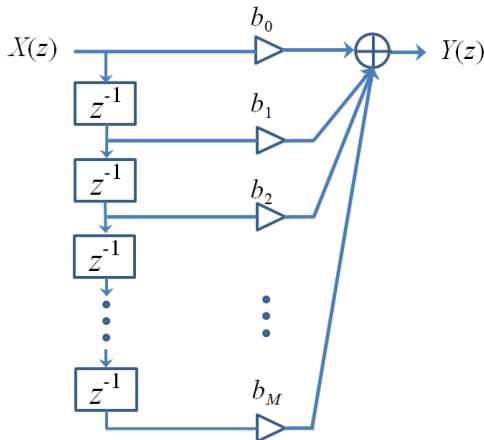
- Interpretação: $y[n]$ no instante presente n é uma média ponderada (por b_m) da amostra atual e M amostras imediatamente anteriores da entrada $x[n]$
- Transformada- \mathcal{Z} : $Y(z) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_M z^{-M}) X(z) = B(z) X(z)$$

Transformada- \mathcal{Z} e Modelos MA

- Representação por Diagrama de Blocos

$$Y(z) = (b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M})X(z)$$



Transformada- \mathcal{Z} e Modelos AR

- Modelo AR (*Auto-Regressivo*) de ordem N :

$$y[n] = \sum_{k=1}^N -a_k y[n-k]$$

- Interpretação: $y[n]$ no instante presente n é uma média ponderada (*por* $-a_k$) de N amostras imediatamente anteriores da própria saída
- Transformada- \mathcal{Z} : $Y(z) = \sum_{k=1}^N -a_k z^{-k} Y(z)$

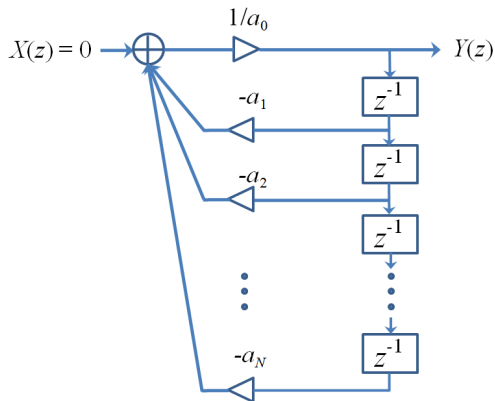
$$Y(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = 0 \Rightarrow Y(z) A(z) = 0 \Rightarrow Y(z) = 0 \frac{1}{A(z)}$$

- $A(z) = 1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2} + \dots + a_N z^{-N}$

Transformada- \mathcal{Z} e Modelos AR

- Representação por Diagrama de Blocos ($a_0 = 1$)

$$Y(z) = \left(-a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} - \dots - a_N z^{-N} \right) Y(z)$$



Transformada- \mathcal{Z} e Modelos ARMA

- Modelo ARMA de ordem $\max\{N, M\}$:

$$y[n] = \sum_{k=1}^N -a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

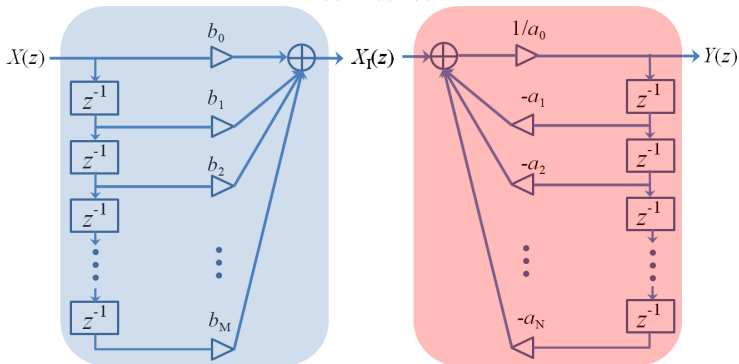
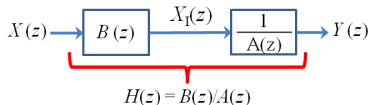
- Transformada- \mathcal{Z} (TZ):

$$Y(z) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k} \right) = \sum_{m=0}^M b_m z^{-m} X(z)$$

- Razão Entrada-Saída: $\frac{Y(z)}{X(z)} \triangleq H(z) = \frac{\sum_{m=0}^M b_m z^{-m}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}$
- $H(z)$ é chamada de Função de Transferência do sistema ARMA

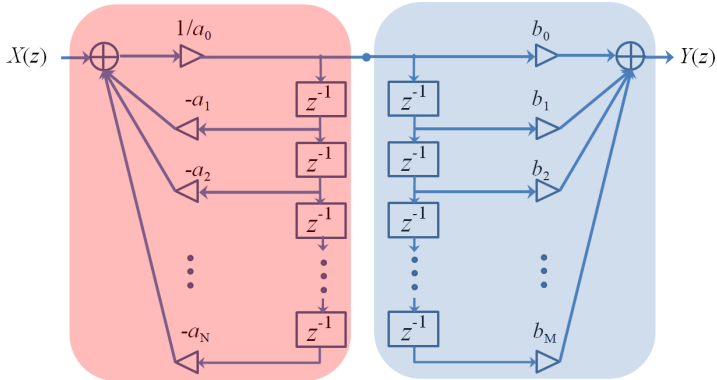
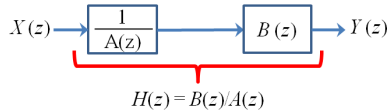
Transformada- \mathcal{Z} e Modelos ARMA de Ordem $N = M$

- Representação por diagrama de blocos: $H(z) = B(z) \frac{1}{A(z)}$



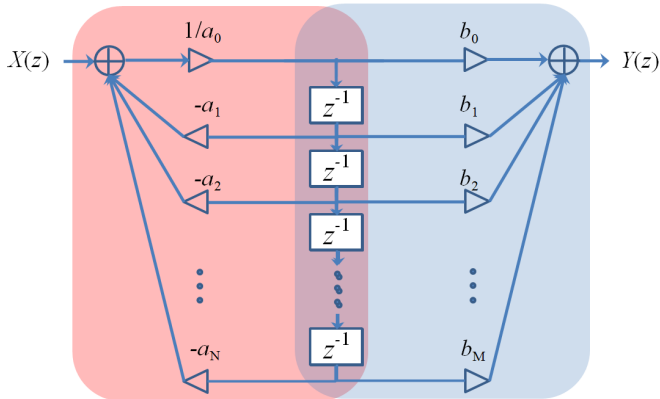
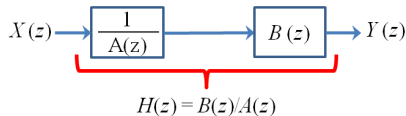
Transformada- \mathcal{Z} e Modelos ARMA de Ordem $N = M$

- Representação por diagrama de blocos: $H(z) = \frac{1}{A(z)} B(z)$



Transformada- \mathcal{Z} e Modelos ARMA de Ordem $N = M$

- Representação por diagrama de blocos: $H(z) = \frac{1}{A(z)} B(z)$




Transformada- \mathcal{Z} de $s[n]$ e Seu Espectro $S(\omega)$

- $S(\omega) = S(z)|_{z=e^{j\omega}}$: Avaliação de $S(z)$ sobre a circunferência unitária
- Para uma $S(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ qualquer
 - Raízes de $B(z)$: ZEROS da TZ
 - Raízes de $A(z)$: PÓLOS da TZ
 - A localização dos pólos e zeros de $S(z)$ em relação à circunferência unitária define o espectro $S(\omega)$
 - Pólos próximos à circunferência unitária: picos espectrais no entorno das fases dos pólos
 - Zeros próximos à circunferência unitária: vales espectrais no entorno das fases dos zeros

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Motivação

● Motivação

- Problema: Análise de Sinais Não-estacionários: características espectrais variantes no tempo
- Análise de Fourier captura todo o conteúdo espectral do sinal ocorrido no intervalo temporal sob consideração
- Exemplo: três tons sequenciais 
- **Questão: Como rastrear o comportamento espectral ao longo do tempo?**

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Procedimento para sinais em tempo discreto

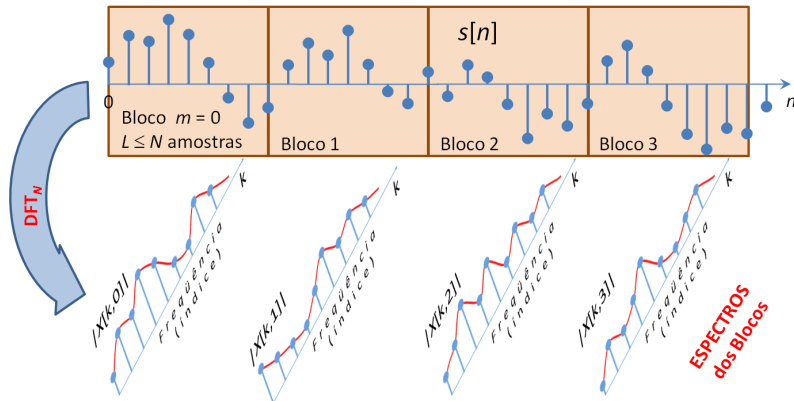
● Espectrograma: Procedimento Básico

- Segmentação temporal de $s[n]$ em trechos curtos de N amostras
 - $x_m[n] = s[n + mN]$, com $n = 0, 1, \dots, N - 1$ (nos quais se assume valer a estacionariedade)
- Cálculo do espectro de Fourier $X[k, m]$, i.e., $\text{DFT}_N\{x_m[n]\}$
 - $k \in \mathbb{Z}$ é o índice da frequência ($2\pi k/N$) e $m \in \mathbb{Z}$ é o índice do bloco (tempo)
- Organização de $|X[k, m]|$ em uma matriz
 - Visualização de $|X[k, m]|$ como imagem: a magnitude é mapeada em escala colorida ou de níveis de cinza

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Ilustração




● Graficamente



Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)




Efeito do Janelamento

● Efeito do Janelamento

- $x_0[n] = s[n]w[n]$, com $w[n] = 1$, para $n = 0, 1, \dots, N - 1$, sendo nula caso contrário
- No domínio espectral: $X[k, 0] = S[k] * W[k]$
 - O espectro da janela é convoluido com o espectro original $S[k]$
- Janelamento no tempo \Rightarrow Espalhamento espectral
 - Redução da capacidade de **RESOLVER** componentes espectrais
- Exemplos
 - Espectros da janela retangular 
 - Cossenóide janelada 
 - Duas cossenóides janeladas 

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Variações do Procedimento

- **Segmentação temporal com blocos justapostos ou sobrepostos**
 - Sobreposição (avanço da janela) permite controlar a resolução temporal no plano TF
 - Avanços pequenos no tempo
 - Maior resolução temporal
 - Mais blocos para computar o espectro
 - Maior custo computacional
- **Tipos de janelas: Retangular, Hanning, Hamming, etc**
 - Balanço: largura do lóbulo principal vs altura dos laterais 
 - Largura do lóbulo principal: afeta a capacidade de resolver componentes próximas na frequência
 - Magnitude dos lóbulos laterais: afeta a capacidade de visualização de componentes de baixa intensidade  

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)








Variações do Procedimento

- **Tamanho do bloco em relação ao tamanho da DFT**

- DFT_N via FFT: $N = 2^p$
- Em geral: $N_{\text{FFT}} \geq N_{\text{bloco}}$
- $N_{\text{FFT}} > N_{\text{bloco}}$: *Zero-padding* ou preenchimento com zeros
 - Maior N_{FFT} : amostragem mais fina da DTFT na frequência
 - Não soluciona do problema de perda de resolução devido ao janelamento

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

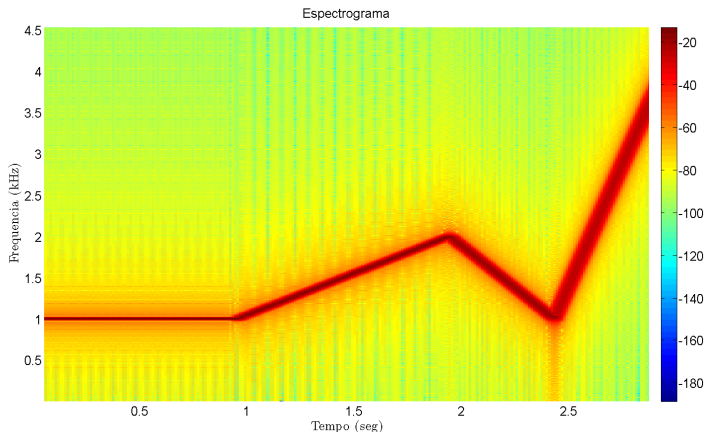
Exemplos

- **Sinal de Teste: sequência de 4 trechos**  
 - Separamento temporal diferente entre os trechos
 - Cada trecho : soma de 3 cossenóides com frequências f_0 , f_1 e f_2
 - $f_0 = 1$ kHz e $f_3 = 2$ kHz; mas $f_2 = \{1001, 1003, 1005 \text{ e } 1010\}$ Hz
- **Espectrogramas**
 - Espectrogramas com parâmetros: N_{bloco} , $N_{\text{FFT}} = 2N_{\text{bloco}}$, $N_{\text{ov}} = \frac{N_{\text{bloco}}}{8}$ (sobreposição de blocos em amostras), janela retangular
 - Espectrograma 1: $N_{\text{bloco}} = 512$ amostras; 
 - Espectrograma 2: $N_{\text{bloco}} = 4096$ amostras;  
 - Espectrograma 3: $N_{\text{bloco}} = 16384$ amostras;  

Transformada de Fourier de Tempo Curto (STFT)

Exemplos

- **Sinal de Teste: varreduras senoidais lineares (taxas crescentes)** 🎵
- **Espectrograma:** Idem caso 2 (slide anterior)



- 1 ATF via Métodos Não-Paramétricos
 - Reatribuição no Tempo e na Frequência

- 2 ATF via Métodos Não-Paramétricos
 - Transformada Fan Chirp

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Introdução – Motivação

- Espectrograma: segmentação temporal e análise de Fourier
- E se o sinal não for estacionário numa janela de observação?
 - Começa do meio para o fim da janela
 - Termina antes do meio da janela
 - Sua frequência (uma apenas, sem perda de generalidade) é modulada
- **Perguntas:**
 - Centro da janela (no tempo) representa o tempo médio de maior concentração de energia do sinal?
 - Localização do pico espectral representa a frequência no instante correspondente ao centro da janela?
 - **Como ajustar a coordenada tempo-frequência para corresponder ao centróide de massa da distribuição T-F do sinal?**

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Formulação Matemática

- Formulação para da STFT em tempo-contínuo, com janela de observação $h(t)$ real e simétrica com $t = 0$, i.e., $h(t) = h^*(-t)$

$$STFT\{x(t)\} = \mathcal{F}\{x(t)h(t-t_c)\} = X(t_c, \omega) \triangleq \int x(\tau)h(\tau-t_c)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

- A equação acima sugere a interpretação da STFT como o resultado da projeção de $x(t)$ sobre funções generalizadas $\phi_\omega(t) = h(t)e^{j\omega t}$
- Lembrando de projeção como convolução

$$L(t_c, \omega) = \int x(\tau)\phi_\omega(t_c - \tau)d\tau = \int x(\tau)h(t_c - \tau)e^{j\omega(t_c - \tau)}d\tau$$

$$L(t_c, \omega) = e^{j\omega t_c} \int x(\tau)h(\tau - t_c)e^{-j\omega\tau}d\tau = e^{j\omega t_c} X(t_c, \omega)$$



Reatribuição no Tempo e na Frequência

Formulação Matemática

- $L(t_c, \omega) = M_{t_c}(\omega) e^{j\phi_{t_c}(\omega)} = e^{j\omega t_c} X(t_c, \omega) = e^{j\omega t_c} M(t_c, \omega) e^{j\phi(t_c, \omega)}$
- Como $M_{t_c}(\omega) = M(t_c, \omega)$

$$\phi_{t_c}(\omega) = \phi(t_c, \omega) + \omega t_c$$

- **Reconstrução de $x(t)$ a partir de $L(t_c, \omega)$:** $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{L(t_c, \omega)\}$

$$x(t) = \iint L(\tau, \omega) \phi_\omega(t - \tau) d\tau d\omega = \iint L(\tau, \omega) h(t - \tau) e^{j\omega(t - \tau)} d\tau d\omega$$

$$x(t) = \iint M_\tau(\omega) e^{j\phi_\tau(\omega)} h(t - \tau) e^{j\omega(t - \tau)} d\tau d\omega$$

$$x(t) = \iint M_\tau(\omega) h(t - \tau) e^{j[\phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau]} d\tau d\omega$$

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Formulação Matemática

- Na fórmula de reconstrução de $x(t)$ os integrandos $M(\cdot)$ e $h(\cdot)$ são funções suaves e funcionam como pesos para as exponenciais complexas $e^{j[\phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau]}$
- **Princípio da Fase Estacionária:**
 - Variação rápida da fase (em TF): exponenciais serão somadas de modo incoerente e tendem a se cancelar
 - Variação lenta da fase (em TF): exponenciais serão combinadas de modo coerente e tendem somar esforços
- Maior contribuição de $M_\tau(\omega)$ para a reconstrução de $x(t)$ ocorre quando a fase $\phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau$ é estacionária no entorno do par $(\hat{t}, \hat{\omega})$ no plano TF

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \{ \phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau \} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \{ \phi_\tau(\omega) + \omega t - \omega \tau \} = 0$$

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Formulação Matemática

- Da primeira condição:

$$\frac{\partial \phi_{\tau}(\omega)}{\partial \omega} + t - \tau = 0 \Rightarrow t = \hat{t}(\tau, \omega) = \tau - \frac{\partial \phi_{\tau}(\omega)}{\partial \omega}$$

ou

$$\hat{t}(\tau, \omega) = -\frac{\partial \phi(\tau, \omega)}{\partial \omega}$$

- Da segunda condição:

$$\frac{\partial \phi_{\tau}(\omega)}{\partial \tau} - \omega = 0 \Rightarrow \omega = \hat{\omega}(\tau, \omega) = \frac{\partial \phi_{\tau}(\omega)}{\partial \tau}$$

ou

$$\hat{\omega}(\tau, \omega) = \omega + \frac{\partial \phi(\tau, \omega)}{\partial \tau}$$

- $\hat{\omega}(\tau, \omega)$ e $\hat{t}(\tau, \omega)$ são, respectivamente, os valores de frequência e tempo reatribuídos

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Implementação Computacional na Prática

- Envolve aproximações para as derivadas da fase em relação ao tempo e frequência
- Para passos Δt e $\Delta \omega$ e **fase desdobrada em ω** :

$$\frac{\partial \phi(t, \omega)}{\partial t} \approx \frac{1}{\Delta t} \left[\phi \left(t + \frac{\Delta t}{2}, \omega \right) - \phi \left(t - \frac{\Delta t}{2}, \omega \right) \right]$$

$$\frac{\partial \phi(t, \omega)}{\partial \omega} \approx \frac{1}{\Delta \omega} \left[\phi \left(t, \omega + \frac{\Delta \omega}{2} \right) - \phi \left(t, \omega - \frac{\Delta \omega}{2} \right) \right]$$

- $2\Delta \omega$ pode ser escolhido como a resolução da DFT_N : $\frac{2\pi}{N}$ rad/amostra
- $2\Delta t$ pode ser escolhido como o tempo associado ao avanço das janelas na STFT

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Implementação Computacional na Prática

- Lembrando que: $\mathcal{F}\left\{\frac{ds(t)}{dt}\right\} = j\omega S(\omega)$ e $\mathcal{F}\{-jts(t)\} = \frac{dS(\omega)}{d\omega}$
- Alternativa para obtenção de $\hat{t}(t, \omega)$ e $\hat{\omega}(t, \omega)$

$$\hat{t}(t, \omega) = t - \operatorname{Re} \left\{ \frac{X_{\mathcal{T}}(t, \omega)}{X(t, \omega)} \right\}$$

$$\hat{\omega}(t, \omega) = \omega + \operatorname{Im} \left\{ \frac{X_{\mathcal{D}}(t, \omega)}{X(t, \omega)} \right\}$$


- $X(t, \omega)$ é a STFT com janela de análise $h(t)$
- $X_{\mathcal{T}}(t, \omega)$ é a STFT com janela de análise $h(t)t$
- $X_{\mathcal{D}}(t, \omega)$ é a STFT com janela de análise $dh(t)/dt$:
- **Pode ser implementado no domínio discreto via 3 DFTs, para cada bloco**



Reatribuição no Tempo e na Frequência

Exemplos e Observações

● Exemplo

- Sinal: soma de duas senóides de 10 e 20 Hz, amostrado a 70 Hz
- Parâmetros de análise DFT (um bloco): FFT de 256 pontos, janela de Hanning
- Reatribuição das frequências positivas apenas (0 a 35 Hz em passos de 0,28 Hz) 

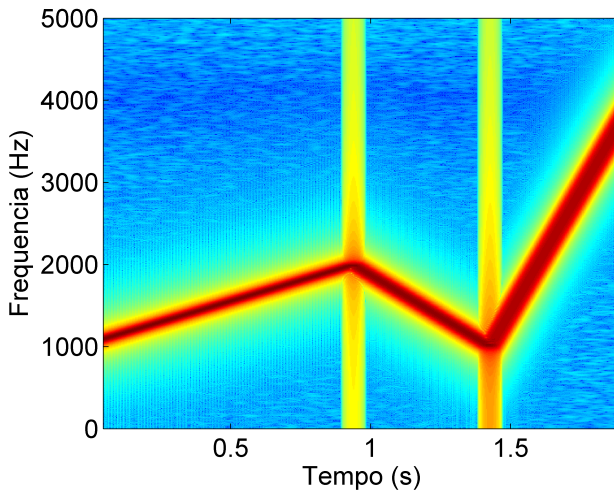
● Observações

- Frequências reatribuídas tendem a se concentrar no entorno dos picos espectrais da DTFT (intra-grade da DFT)
- Frequências reatribuídas podem ser negativas
- Critérios heurísticos podem ser utilizados para selecionar frequências de interesse (e.g. medida de concentração na frequência)

Reatribuição no Tempo e na Frequência

Espectrograma Reatribuído

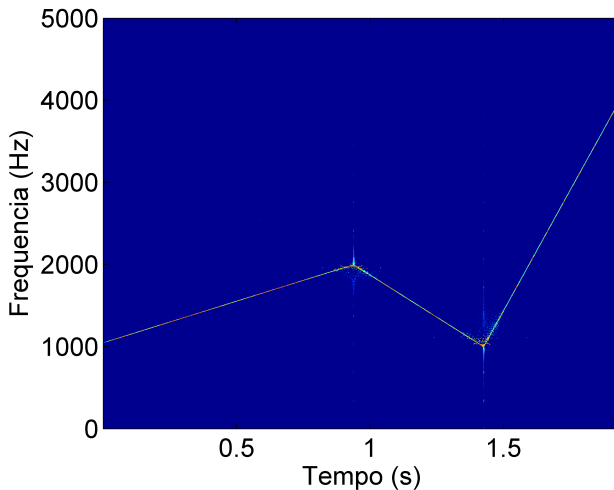
- **Espectrograma Convencional: varredura senoidal**



Reatribuição no Tempo e na Frequência

Espectrograma Reatribuído

- **Espectrograma Reatribuído: varredura senoidal**



Espectrograma Reatribuído






Mais Observações

- São seleccionados pares $\{\hat{t}, \hat{\omega}\}$ em regiões do plano TF com grande concentração local de instantes tempo e valores de frequência reatribuídos
- Descartam-se valores reatribuídos $\{\hat{t}, \hat{\omega}\}$ muito diferentes dos valores $\{t, \omega\}$ originais
- **Visualização:** Envolve uma re-quantização do pares seleccionados $\{\hat{t}, \hat{\omega}\}$ em uma grade mais fina no plano TF que no caso original
- **Links para toolboxes com códigos e exemplos:**
 - <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/21736>
 - <http://people.ece.cornell.edu/land/PROJECTS/ReassignFFT/index.html>

Transformada Fan Chirp (FChT)

Introdução – Motivação

● Motivação

- **Análise de sinais acústicos afinados: quasi-harmônicos**
 - Picos espectrais relacionados harmonicamente: aproximadamente múltiplos inteiros de uma frequência fundamental   
 - Variações temporais na frequência da fundamental carregam significado ou expressão em sinais de voz e música  
 - **Para janelas de curta duração: variação de frequência da fundamental pode ser bem aproximada por uma função linear**

● Idéia por trás da FChT

- Projetar o sinal harmônico de interesse $x(t)$ sobre exponenciais complexas com variação linear da frequência instantânea

Formulação Matemática da FChT

No Tempo Contínuo

- Para frequência ω e taxa de varredura α (ambas reais)

$$X(\omega, \alpha) = \int x(t) \phi_{\omega, \alpha}(t) dt$$

$$\phi_{\omega, \alpha}(t) = \sqrt{\left| \frac{\partial \psi_{\omega}(t)}{\omega \partial t} \right|} e^{-j(\psi_{\omega}(t))}$$

$$\psi_{\omega}(t) = \omega t + \omega \frac{\alpha}{2} t^2$$

$$X(\omega, \alpha) \triangleq \int x(t) \sqrt{|1 + \alpha t|} e^{-j(\omega t + \omega \frac{\alpha}{2} t^2)} dt$$

Formulação Matemática da FChT

Continuação

- **Frequência instantânea das funções exponenciais**

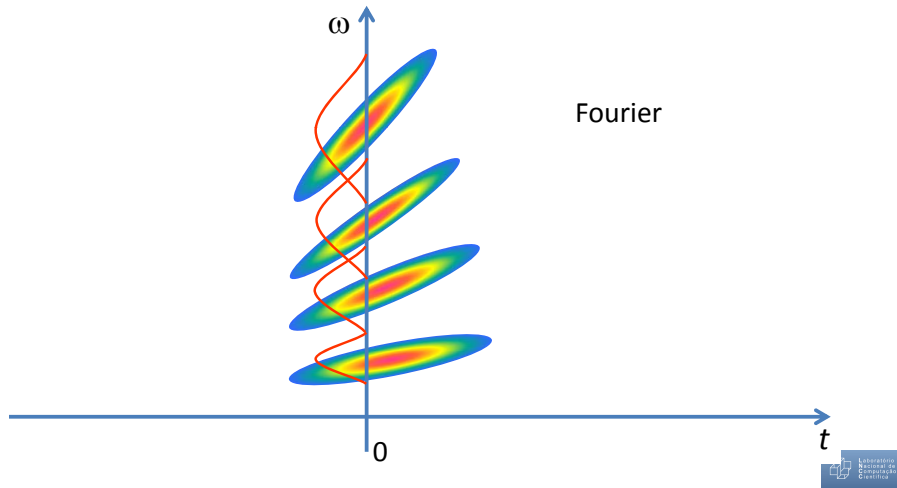
$$\frac{\partial \psi_{\omega}(t)}{\partial t} = v(t) = \omega + \omega \alpha t$$

- **Variação linear no tempo com taxa $\omega\alpha$, i.e., $\propto \omega$**
- Mudança de sinal de $v(t)$ em $t = -\frac{1}{\alpha}$: ponto focal
- **Reconstrução de $x(t)$ a partir de $X(\omega, \alpha)$**
 - Caso $x(t) = 0$ para $t < -\frac{1}{\alpha}$, i.e, nulo para todos os instantes anteriores ao ponto focal

$$X(\omega, \alpha) \triangleq \int x(t) \sqrt{|1 + \alpha t|} e^{j(\omega t + \omega \frac{\alpha}{2} t^2)} dt$$

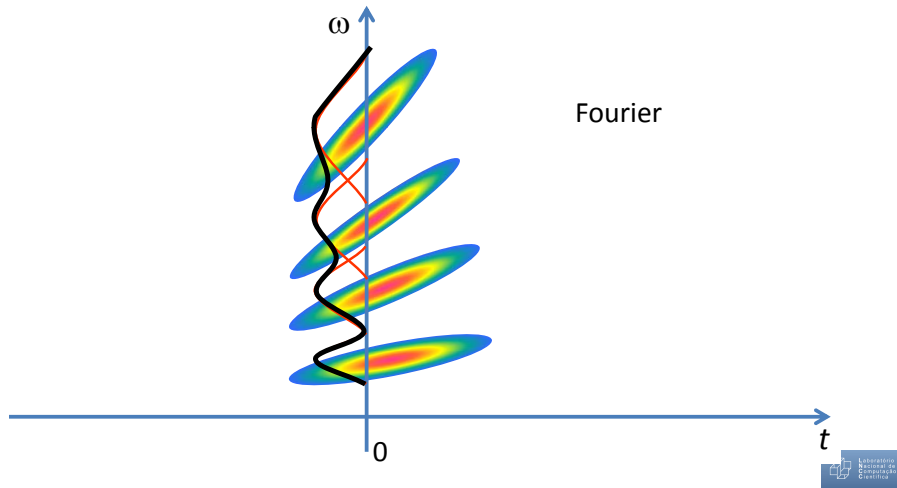
Interpretação Gráfica: Fourier vs FChT

- Transformada de Fourier



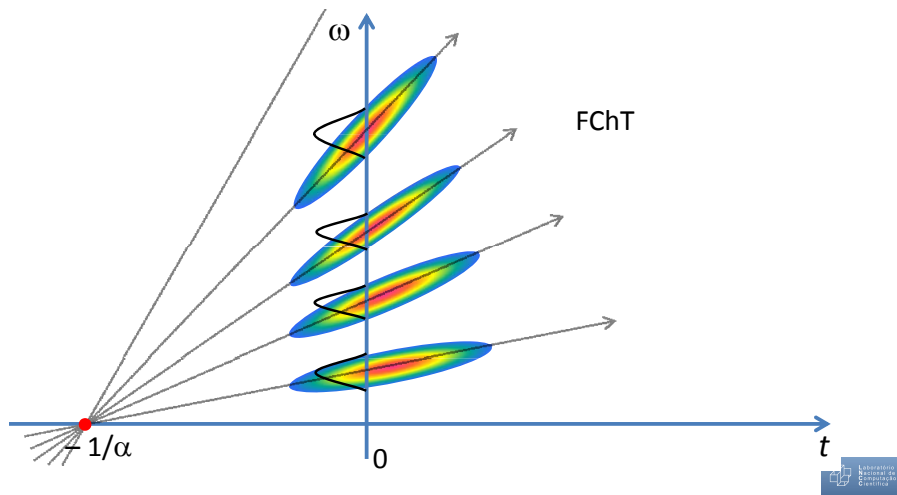
Interpretação Gráfica: Fourier vs FChT

- Transformada de Fourier



Interpretação Gráfica: Fourier vs FChT

- FChT



FChT como Transformada de Fourier de Sinal Deformado no Tempo

Formulação Matemática

- Formulação original

$$X(\omega, \alpha) \triangleq \int x(t) \sqrt{|1 + \alpha t|} e^{j(\omega t + \omega \frac{\alpha}{2} t^2)} dt$$

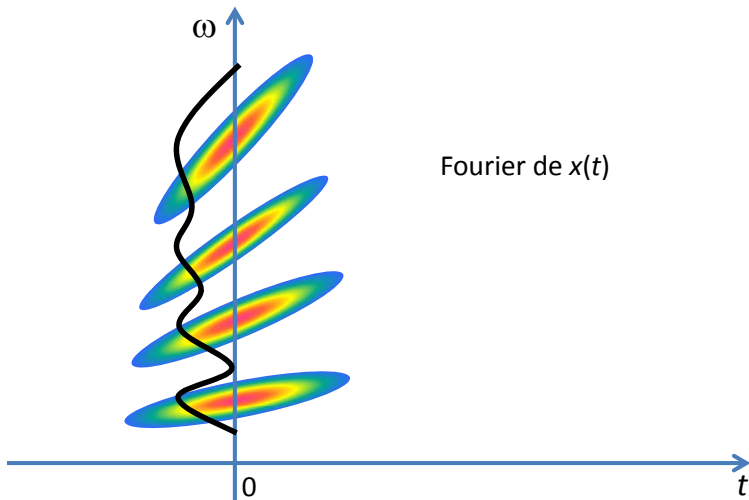
- Fazendo o mapeamento temporal: $\tau = t + \frac{\alpha}{2} t^2$

$$X(\omega, \alpha) = \int_{-1/2\alpha}^{\infty} [\check{x}_+(\tau) + \check{x}_-(\tau)] e^{j\omega\tau} d\tau = \int \chi(\tau) e^{j\omega\tau} d\tau$$

- $\check{x}_{\pm}(\tau) = \frac{1}{\sqrt[4]{|1 + \alpha\tau|}} x(t^{\pm})$
- $t^{\pm} = -\frac{1}{\alpha} \pm \frac{\sqrt{1 \pm 2\alpha\tau}}{\alpha}$
- $\chi(\tau)$ é uma versão de $x(\tau)$ distorcida no domínio temporal pelo mapeamento acima

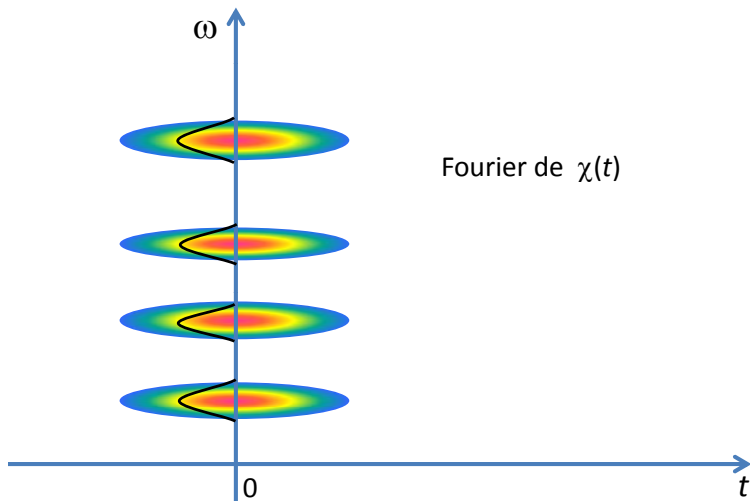
Interpretação Gráfica do Pre-Distorção Temporal

- Densidade TF de $x(t)$ e Espectro de Fourier



Interpretação Gráfica do Pre-Distorção Temporal

- Densidade TF de $\chi(t)$ e Espectro de Fourier



Espectrograma Usando FChT

- Escopo: para sinais predominantemente harmônicos (uma fonte)
- Segmentar $x(t)$ em blocos de curta duração
 - Para garantir variações aproximadamente lineares da frequência fundamental e componentes harmônicas
- Estimar o melhor valor de α para cada bloco
- Aplicar a FChT ao sinal do bloco (índice m)
 - Mapeamento do domínio temporal do sinal janelado, com o α escolhido
 - Transformada de Fourier
- Para cada bloco: amostrar $|X(\omega, \alpha_m)|$ na frequência e organizar os dados em uma matriz para visualização

Espectrograma Usando FChT – Estimativa do α

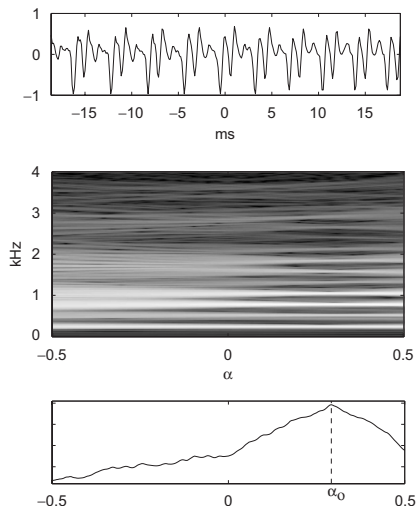
- **Método exaustivo usando um único bloco**

- Construção de um mapa “denso” $|X(\alpha, \omega)|$ para uma faixa predefinida de valores de α
- Marginalização (integração) de $|X(\alpha, \omega)|$ em ω :
 - Sobre todas as frequências: $F(\alpha) = \int |X(\alpha, \omega)| d\omega$
 - Se houver estimativa confiável da fundamental ω_0 :
$$F(\alpha) = \sum_{k=1}^L |X(\alpha, k\omega_0)|$$
- Seleção do valor ótimo de α para o bloco: $\alpha_o = \max_{\alpha} \{F(\alpha)\}$

- **Há soluções menos custosas computacionalmente**

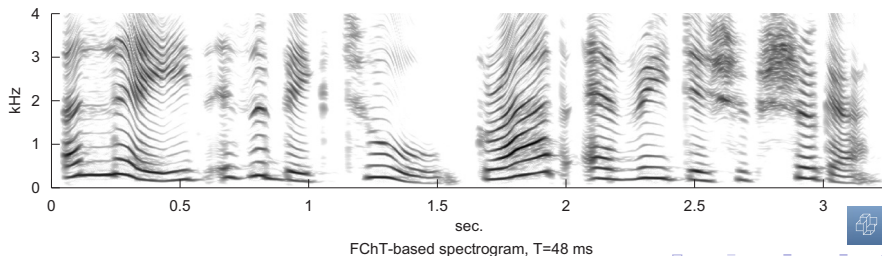
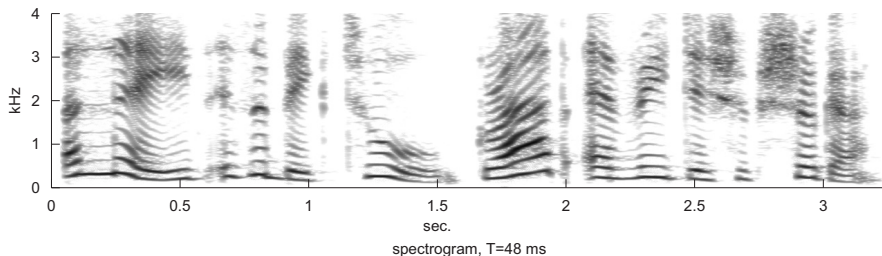
Espectrograma Usando FChT – Estimativa do α

- Exemplo (©Veruaga & Képesi 2007)



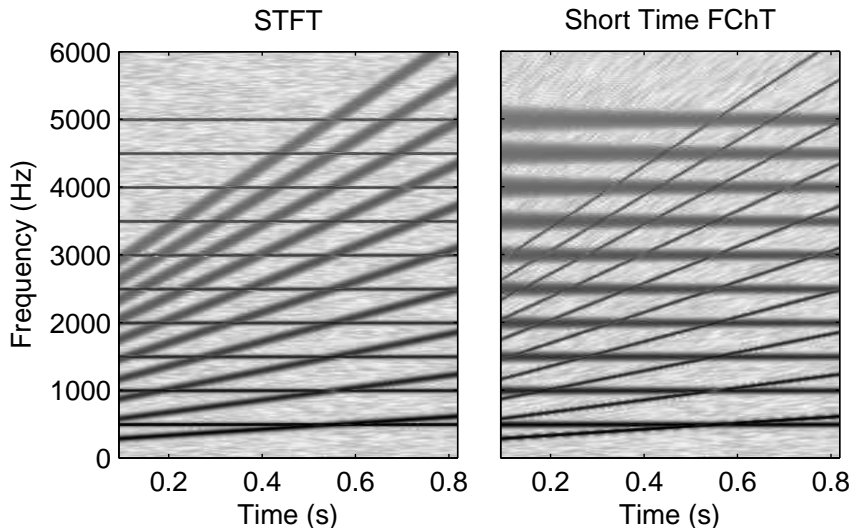
Espectrograma Fourier vs FChT

● Sinal de voz (uma fonte) (©Veruaga & Képesi 2007)



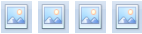
Espectrograma Fourier vs FChT

- Exemplo com duas fontes (©Rocamora 2011)



FChT para Sinais Discretos

Outline do Procedimento

- Aplicar mapeamento de domínio temporal (para algum α) ao sinal discreto: $x[n] \rightarrow \chi[n]$
- Ajustar funções interpoladoras no tempo contínuo pelas amostras de $x[n]$
 - Interpoladores: linear por partes, polinomial de baixa ordem (splines, Lagrange, etc)
- Re-amostrar o sinal interpolado nos novos instantes de tempo definidos pelo mapeamento
 - Número de amostras do sinal original tipicamente diferente daquele do sinal reamostrado 
- Normalização de amplitude
- Cálculo da DFT_N de $\chi[n]$

1 ATF via Métodos Não-Paramétricos

- Transformadas de Wavelets

2 ATF via Métodos Paramétricos

- Modelagem de Sinais via Sistema Auto-regressivo

Transformadas de Wavelets

Introdução – Motivação

- **Origem do nome:** wave (onda) + let (diminutivo em Francês) = pequena onda, “ondinha”, “ondícula” ou “ondaleta”
- **Idéia Central (para sinais em tempo contínuo)**
 - **Análise:** Projecção de um sinal $s(t)$ sobre em funções $\tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t)$, que são versões escaladas no tempo (por $\alpha > 0$) e deslocadas no tempo (por $\tau \in \mathbb{R}$) de uma função-mãe $\tilde{\psi}(t)$ (wavelet-mãe)

$$\tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t) = \tilde{\psi}\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right)$$

$$S(\alpha, \tau) \triangleq \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t) dt = \frac{1}{\alpha^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \tilde{\psi}\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) dt$$

- **Síntese:** Expansão de $s(t)$ em função de $\phi_{\alpha,\tau}(t)$ (que guarda alguma relação com $\tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t)$)

$$s(t) \triangleq \frac{1}{\alpha^{\frac{3}{2}}} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} S(\alpha, \tau) \psi\left(\frac{t-\tau}{\alpha}\right) d\tau d\alpha$$



Transformadas de Wavelets

Observações Conceituais Importantes

- **É uma família de Transformadas**
- **Nomenclatura**
 - CWT: Transformada de Wavelets Contínua (para sinais contínuos)
 - DWT: Transformada de Wavelets Discreta (para sinais contínuos)
 - DTDWT: Transformada de Wavelets Discreta para Sinais Discretos
- **Diferenças essenciais em relação à Fourier**
 - **O domínio transformado não envolve frequência**, mas sim, escala (α) e deslocamento (τ)
 - Há inúmeras opções de escolha para as wavelets-mãe 
 - Podem ser ortogonais (formam uma base) ou não. No caso ortogonal: $\tilde{\phi}_{\alpha,\tau}(t) = \phi_{\alpha,\tau}(t)$
 - **Podem ter suporte temporal compacto (finito) ou não**
 - Podem conter várias componentes frequenciais ao mesmo tempo
 - São funções com valor médio nulo: espectro passa-faixas

CWT

Conceitos Relevantes

- Wavelet-mãe com suporte compacto no tempo
 - Evita necessidade de janelamento (requerido na STFT)
 - CWT adequada para representar sinais com transições rápidas ou descontinuidades (e.g. bordas em imagens)
- As funções $\phi_{\alpha,\tau}(t)$ são auto-semelhantes
- A expansão de $s(t)$ em termos de $\phi_{\alpha,\tau}(t)$ para todos os valores de $\alpha > 0$ e τ (ambos reais) é imprática
 - Sinais práticos têm suporte temporal finito: desnecessário expandir $s(t)$ em $\phi_{\alpha,\tau}(t)$ com suporte temporal muito maior que o de $s(t)$
 - Dependendo da aplicação, pode-se definir um limite superior para o nível de detalhamento necessário para representação de $s(t)$
 - Adotam-se limites inferior e superior para a escala (α) na representação de $s(t)$ via wavelets

Transformada de Wavelets Discreta – DWT

Para sinais contínuos

- Diferença em relação à CWT: Discretiza o domínio $\tau - \alpha$
- Discretização usual (com base ortogonal):
 - Escalamento: grade logaritma (base 2), i.e., $\alpha \rightarrow 2^j$ com $j \in \mathbb{Z}$
 - Deslocamento: grade linear, i.e., $t \rightarrow k \in \mathbb{Z}$
 - $\psi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j t - k)$
 - *wavelet*-mãe de análise e síntese: $\psi_{0,0}(t)$ (escala $j = 0$)
- **Equação de Análise:**

$$d_{j,k} = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi_{j,k}(t) dt$$

- **Equação de Síntese:**

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

- À medida que j cresce, acrescentam-se “detalhes” ao sinal



DWT

Limitação na Escala

- Representar $s(t)$ em todas as escalas 2^j é imprático
- Solução: impor limites inferior e superior para a representação multi-escala
- **Limite inferior:** adotar escala de partida (por convenção, $j = 0$)


$$s(t) = \sum_k \sum_{j=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \underbrace{\sum_k \sum_{j=-\infty}^{-1} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)}_{s_g(t)} + \sum_k \sum_{j=0}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(t)$$

- $s_g(t)$ é uma representação grosseira de $s(t)$
- Pode-se mostrar que

$$s_g(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \varphi(t-k) \quad \text{com} \quad c_k = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \varphi(t-k) dt$$

DWT – Limitação na Escala

Função de Escalamento

- $\varphi(t)$ é a **Função de Escalamento** associada à wavelet $\psi_{0,0}(t)$ 
- $\varphi(t)$ pode ser contruída a partir de $\psi_{0,0}(t)$
- $s_g(t)$ é uma representação aproximada de $s(t)$ via expansão em termos de $\varphi(t)$ (escala única $j = 0$, só deslocamentos temporais)
- **É possível construir uma aproximação para $s(t)$, em uma escala arbitrária $j = J$, como uma expansão de $s(t)$ somente em termos da função de escalamento associada à wavelet $\psi_{J,k}(t)$**
- Como as funções de escalamento são construídas das wavelets, também guardam a propriedade de auto-semelhança, i.e., para uma escala j , $\varphi_{j,k}(t) = 2^{\frac{j}{2}} \varphi(2^j t - k)$
- Representação mono-escala de $s_g(t)$ via funções de escalamento na escala j

$$s_g^j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{j,k} \varphi_{j,k}(t - k)$$

DWT – Limitação na Escala

Wavelet e Função de Escalamento

- Interesse da DWT é a representação multi-escala
- A representação de $s(t)$ via $\varphi_{j,k}(t)$ é mono-escala
- Propriedade-chave da decomposição multi-escala

$$s_g^{j-1}(t) + \underbrace{\sum_k d_{j-1,k} \psi_{j-1,k}(t)}_{\mathcal{W}^{j-1}(t)} = s_g^j(t)$$

- A relação acima é recursiva. Caso se admita para $s(t)$ representação entre as escalas máxima $j = J$ e mínima $j = 0$:

$$s(t) = s_g^0(t) + \mathcal{W}^1(t) + \mathcal{W}^2(t) + \cdots + \mathcal{W}^J(t)$$

DWT – Computação Recursivas dos Coeficientes

Wavelet e Função de Escalamento

- Graças à auto-similaridade das funções envolvidas e à relação recursiva entre as representações em escalas diferentes, $c_{j-1,k}$ e $d_{j-1,k}$ podem ser calculados via operações simples sobre $c_{j,k}$

$$c_{j-1,k} = \sum_m h_{pb}[m - 2k]c_{j,m}$$

$$d_{j-1,k} = \sum_m h_{pa}[m - 2k]c_{j,m}$$

- $h_{pb}[n]$ e $h_{pa}[n]$ são sequências finitas que dependem da wavelet-mãe

$$h_{pb}[n] = \sqrt{2} \int \varphi(t)\varphi(2t - n)dt$$

$$h_{pa}[n] = \sqrt{2} \int \psi(t)\varphi(2t - n)dt$$

DWT – Estratégia de Decomposição

Entre escalas máxima $j = J$ e mínima $j = 0$

● Procedimento

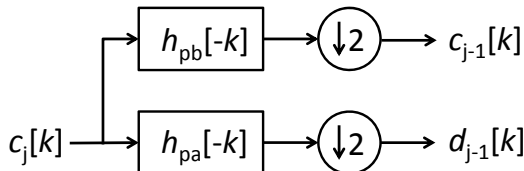
- Projetar $s(t)$ sobre $\varphi_{J,k}(t)$ e obter os coeficientes $c_{J,k}$
- Obter $c_{J-1,k}$ e $d_{J-1,k}$ a partir de $c_{J,k}$ via recursões anteriores
- Continuar o processo até obter $c_{0,k}$ e $d_{0,k}$

● Implementação Prática: sinais e sistemas discretos

- Sistema compressor por M : $y[n] = x[Mn]$



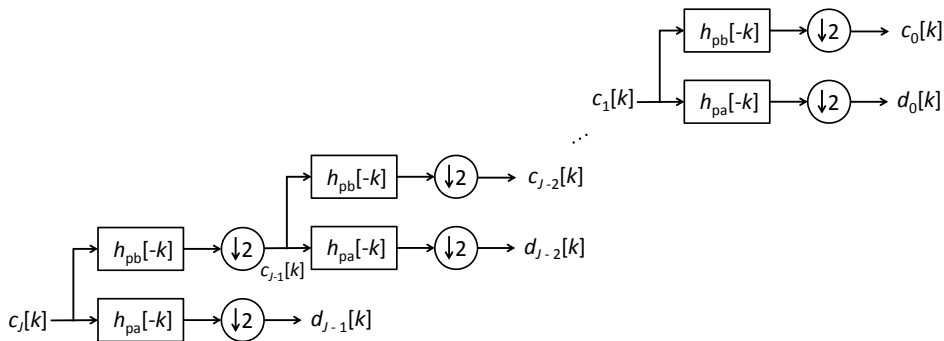
- $c_{j-1,k} = \sum_m h_{pb}[m - 2k]c_{j,m}$ e $d_{j-1,k} = \sum_m h_{pa}[m - 2k]c_{j,m}$



DWT – Implementação via DSP

Entre escalas máxima $j = J$ e mínima $j = 0$

- Decomposição entre escalas máxima $j = J$ e mínima $j = 0$



DTDWT – DWT para Sinais Discretos

Prática Usual

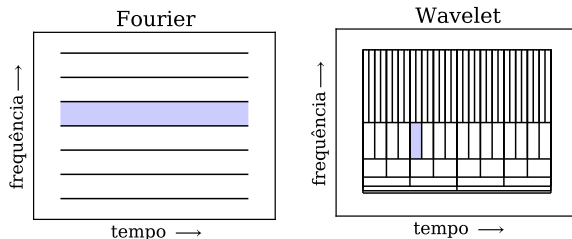
- O sinal de interesse disponível $s[k]$, com $k \in \mathbb{Z}$, já está em tempo discreto, i.e., é uma sequência de números com N amostras
- Assume-se que, na escala mais alta escolhida $j = J$, as funções de escalamento são suficientemente localizadas no tempo para aproximar bem um impulso de Dirac:

$$\varphi_{J,k}(t) = 2^{\frac{J}{2}} \varphi_{0,0}(2^J t - k) \approx \delta(t - k)$$

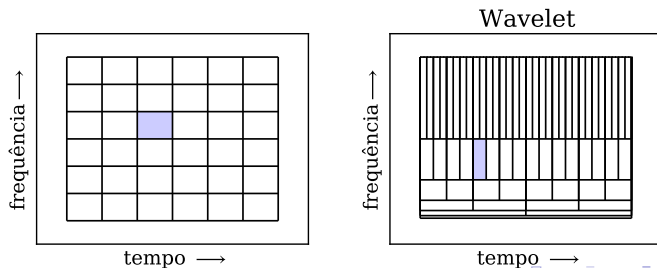
- **Faz-se $c_{J,k} = c_J[k] = s[k]$**
- Aplica-se $c_J[k]$ à entrada do sistema discreto de decomposição para obter $d_j[k]$ e $c_j[k]$ nas escalas mais baixas
 - Se $N = 2^J$, bastam J estágios de decomposição para obter $d_0[k]$ e $c_0[k]$ com apenas uma amostra cada
 - Complexidade computacional da decomposição: $\mathcal{O}(N)$

DTDWT vs DFT_N – Esquadrinhamento do Plano TF

- Análise de um bloco de $N = 2^J$ amostras



- Análise de vários blocos de $N = 2^J$ amostras



Análise Espectral Paramétrica

Introdução – Motivação

● Estratégia de Análise Espectral Paramétrica

- Considerar que um sinal observado $s[n]$ é a resposta ao impulso de um sistema linear invariante no tempo: $h[n]$
- Ajustar os parâmetros do sistema de modo a minimizar uma função-custo relacionada ao erro entre $s[n]$ e $h[n]$
- Tomar a resposta em frequência do sistema $H(\omega) = DTFT\{h[n]\}$ como representativa do conteúdo espectral de $s[n]$

● Vantagens

- Possibilidade de representação compacta da informação: parâmetros do modelo (sistema)
- Para um bloco de sinal com poucas amostras: tende a produzir espectro com maior resolução do que a DTFT
- Mitiga efeitos espectrais da presença de ruído em $s[n]$



Análise Espectral Paramétrica via Sistema Auto-Regressivo

● Outline do Procedimento

- Observa-se uma seqüência discreta $\tilde{y}[n]$ de $L + 1$ amostras
- Assume-se que $\tilde{y}[n]$ é gerado como pelo sistema recursivo (AR) de ordem $N < L$, regido pela Equação de Diferenças (ED)

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n - k]$$

- Como a ED tem ordem N , são necessárias N condições iniciais para rodar as recursões
- Para inicializar as iterações, usar as N primeiras amostras da observação $\tilde{y}[n]$, i.e. $\tilde{y}[0]$ a $\tilde{y}[N - 1]$
- Obter a saída do modelo $y[N]$ (predição) e medir o erro em relação ao valor observado $\tilde{y}[N]$, i.e. $e[N] = \tilde{y}[N] - y[N]$
- Obter $e[n]$ para $N \leq n \leq L$
- Definir e minimizar uma função-custo envolvendo $e[n]$ com relação aos parâmetros a_k do modelo

Erro de Modelagem ou Aproximação

- Erro de Aproximação: $e[n] = \tilde{y}[n] - y[n]$
- Lembrando que $y[n]$ é a saída do sistema AR

$$e[n] = \tilde{y}[n] - \sum_{k=1}^N -a_k \tilde{y}[n-k], \quad \text{para } n = N, N+1, \dots, L$$

- Considerando a_k com valores negativos, pode-se escrever em notação matricial:

$$\mathbf{e} = \tilde{\mathbf{y}} - \tilde{\mathbf{Y}}\mathbf{a}, \quad \text{com}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} = [\tilde{y}_N, \tilde{y}_{N+1}, \dots, \tilde{y}_L]^T, \quad \mathbf{a} = [a_1, a_2, \dots, a_N]^T, \quad \mathbf{e} = [e_N, e_{N+1}, \dots, e_L]^T$$

$$\tilde{\mathbf{Y}} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{N-1} & \cdots & \tilde{y}_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{y}_{L-1} & \cdots & \tilde{y}_{L-N} \end{pmatrix}$$

Definição e Minização da Função-Custo

- Propósito da Função-Custo: atribuir uma **PENALIZAÇÃO** para erro de modelagem
- Há várias escolhas possíveis para uma função-custo
- Escolha usual: função quadrática do erro (valores reais aqui)

$$\varepsilon = \mathbf{e}^T \mathbf{e}$$

- Minimização de ε em relação aos \mathbf{a}

$$\min_{\mathbf{a}} \left\{ \mathbf{e}^T \mathbf{e} \right\} \Rightarrow \mathbf{a}^{\text{LS}}$$

- Pode-se mostrar que

$$\mathbf{a}^{\text{LS}} = \left(\tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{Y}} \right)^{-1} \tilde{\mathbf{Y}}^T \tilde{\mathbf{y}}$$

Escolha da Ordem N do Modelo AR

- Está relacionada com o número de componentes ressonantes no espectro do sinal $\tilde{y}[n]$.
 - Pode ser inferida por análise espectral não-paramétrica (FFT).
- Obtenível via métodos e heurísticas para a seleção de ordem.
 - Análise do comportamento de $\mathbf{e}^T \mathbf{e}$ em função da ordem N .
- Pode envolver aspectos práticos:
 - Precisão da aproximação \times complexidade computational.

Outras Observações

- **No Matlab** há várias funções para obter **a**: `ar.m` (implementa vários métodos), `arburg.m`, `aryule.m`, `lpc.m`, `armcov.m`
- O número mínimo L de amostras necessárias para obter uma solução de ordem N varia de acordo com o método escolhido
- Algumas soluções garantem um modelo estável (Burg, Yule-Walker), outras não (LS, Covariância)

Análise Espectral Paramétrica via Modelo ARMA

● Outline do Procedimento

- Assume-se que $\tilde{y}[n]$ é gerado como resposta impulsiva (RI) do sistema recursivo (ARMA) de ordem $\max\{N, M\} < L$, regido pela Equação de Diferenças (ED)

$$y[n] = - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k] + \sum_{m=0}^M b_m x[n-m]$$

- A RI, i.e., quando $x[n] = \delta[n]$ em forma recursiva é dada por

$$h[n] = - \sum_{k=1}^N a_k h[n-k] + \sum_{m=0}^M b_m \delta[n-m]$$

- **Problema:** Não é possível resolver para a_k e b_m ao mesmo tempo via equações lineares.
- **Solução:** Dividir o problema em duas partes.
 - Note que a entrada $x[n] = \delta[n]$ só afeta $h[n]$ até $n = M$. Depois disso, $h[n]$ só depende da parte recursiva.



Análise Espectral Paramétrica via Modelo ARMA

● Outline do Procedimento, continuação

- Subdividir o domínio em dois sub-conjuntos:

$$\mathcal{N}_1 = 0 \leq n \leq M \quad \text{e} \quad \mathcal{N}_2 = M < n \leq L$$

- Em \mathcal{N}_2 , o modelo é AR e, portanto, a_k podem ser obtidos via estimação LS (ou outro critério).
- Conhecendo-se a_k :
 - Em \mathcal{N}_1 estimam-se os coeficientes b_m por um sistema de $M + 1$ equações (Método de Prony).
 - Em $\mathcal{N}_1 \cup \mathcal{N}_2$ Estimam-se os coeficientes b_m por minimização LS (Método de Shank).
 - Iterações entre as estimativas de a_k e as de b_k até a convergência, segundo algum critério (Método de Steiglitz-McBride)