



Métodos numéricos para problemas com múltiplas escalas ¹

Alexandre L. Madureira

Laboratório Nacional de Computação Científica - LNCC,
Av. Getúlio Vargas 333, Petrópolis – RJ
E-Mail: alm@lncc.br

Resumo: Investigamos o processo de homogeneização em uma dimensão, enfatizando aspectos teóricos e numéricos. Apresentamos uma equação simples mas que carrega em si várias das dificuldades presentes em problemas mais sofisticados. A seguir discutimos três alternativas de modelagem para a equação em discussão: homogeneização, elementos finitos clássicos, e elementos finitos multiescala. Procuramos mostrar e vantagens e desvantagens de cada técnica e apresentamos vários exemplos numéricos. Finalmente concluímos mostrando resumidamente outras técnicas, além de uma outra dificuldade presente quando o problema perde coercividade.

Palavas Chave: Homogeneização, Elementos Finitos Multiescala

1 Introdução

Nestas notas discutiremos algumas técnicas numéricas para aproximar soluções de problemas com múltiplas escalas. Apresentamos as idéias no contexto mais simples possível, com um problema unidimensional com coeficientes oscilatórios, tendo em vista que os casos de interesse ocorrem em dimensões maiores. Apresentamos um método que funciona bem para estas classes de problemas.

É notório que o método de Galerkin tradicional não é adequado para resolver problemas na presença de múltiplas escalas. De fato, o método não resolve as pequenas escalas a custo aceitável e pode não ser uniformemente estável [30]. O objetivo da modelagem multiescala é capturar o comportamento macroscópico sem resolver as pequenas escalas.

Diferentes estratégias que estendem o método de Galerkin tradicional foram desenvolvidas para se tratar destas dificuldades. Uma formulação bem geral flexível em relação às escolhas dos espaços das funções admissíveis e funções testes foi apresentada por Babuška e Orborn [2, 3], mas estas escolhas têm que ser feitas levando-se em consideração o problema específico.

A seguir, descrevemos o problema e mostramos uma forma clássica de aproximá-lo, através de homogeneização. A seguir apresentamos e analisamos as deficiências do método de elementos finitos clássico, antes de apresentar e analisar o método de elementos finitos multiescala. Finalmente, concluímos com vários comentários sobre este e outros métodos existentes na literatura.

Boa parte deste texto apareceu originalmente em [29].

¹Dedico estas notas introdutórias ao amigo Márcio Murad, por sua dedicação e apoio ao ensino e difusão do conhecimento científico.

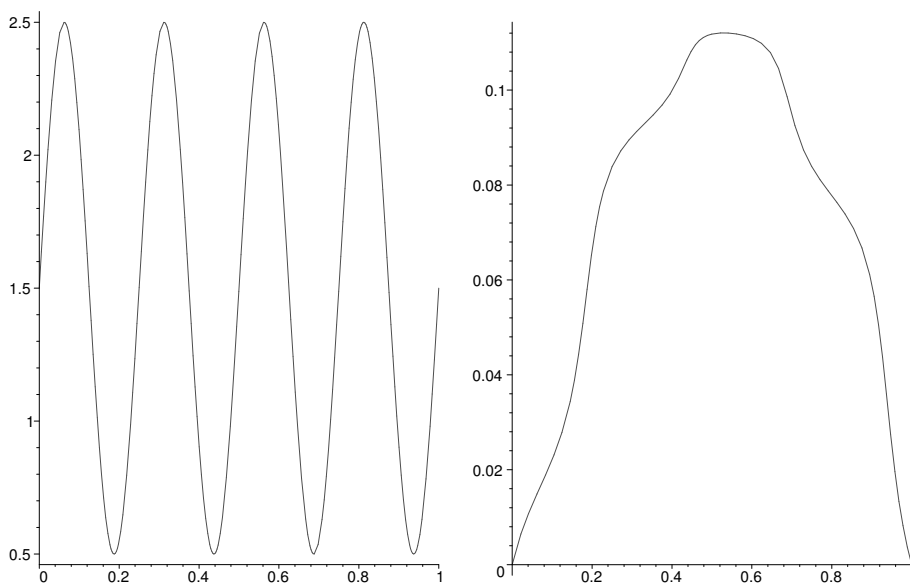


Fig. 1: Gráficos de $a(\cdot/\epsilon)$ e da solução exata para $\epsilon = 1/4$.

2 Um modelo

Para descrever as propriedades qualitativas e dificuldades relacionadas com problemas que apresentam caráter oscilatório, consideramos o seguinte modelo unidimensional:

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\epsilon) \frac{du^\epsilon}{dx}(x) \right) = f(x) \quad \text{em } (0, 1), \quad (1)$$

$$u^\epsilon(0) = u^\epsilon(1) = 0.$$

onde $a(\cdot)$ é suave e periódica com período 1, e $\beta \geq a(x) \geq \alpha > 0$, para α, β reais. Estamos interessados somente no caso em que $\epsilon \leq 1$, portanto assumiremos também esta desigualdade.

Neste caso unidimensional, é fácil obter uma solução analítica para (1):

$$u^\epsilon(x) = - \int_0^x \left(\frac{1}{a(\xi/\epsilon)} \int_0^\xi f(t) dt + c_0 \right) d\xi, \quad c_0 = \frac{1}{\int_0^1 a(\xi/\epsilon) d\xi} \int_0^1 \left(\frac{1}{a(\xi/\epsilon)} \int_0^\xi f(t) dt \right) d\xi.$$

Nos nossos exemplos, consideraremos

$$f(x) = 1, \quad a(x) = \frac{1}{2}(\beta - \alpha)(1 + \sin(2\pi x)) + \alpha, \quad \alpha = \frac{1}{2}, \quad \beta = \frac{5}{2}. \quad (2)$$

Seja a seguinte sequência de problemas, onde $\epsilon = 1/4$, $\epsilon = 1/8$, e $\epsilon = 1/16$, e veja as figuras 1, 2 e 3. É fácil notar neste exemplo que crescem as oscilações de $a(\cdot/\epsilon)$ quando $\epsilon \rightarrow 0$.

Em dimensões maiores, é extremamente difícil obter soluções analíticas. Motivados por esta dificuldade, investigaremos agora como encontrar soluções aproximadas para (1).

Uma possibilidade explorada na Seção 3 é o uso de *técnicas de homogeneização*. Como vimos, a idéia básica apoia-se no fato de que, quando $\epsilon \rightarrow 0$, a solução exata converge uma função chamada de *solução homogeneizada*. Espera-se então que para valores de ϵ pequenos, a aproximação pela solução homogeneizada seja boa o suficiente.

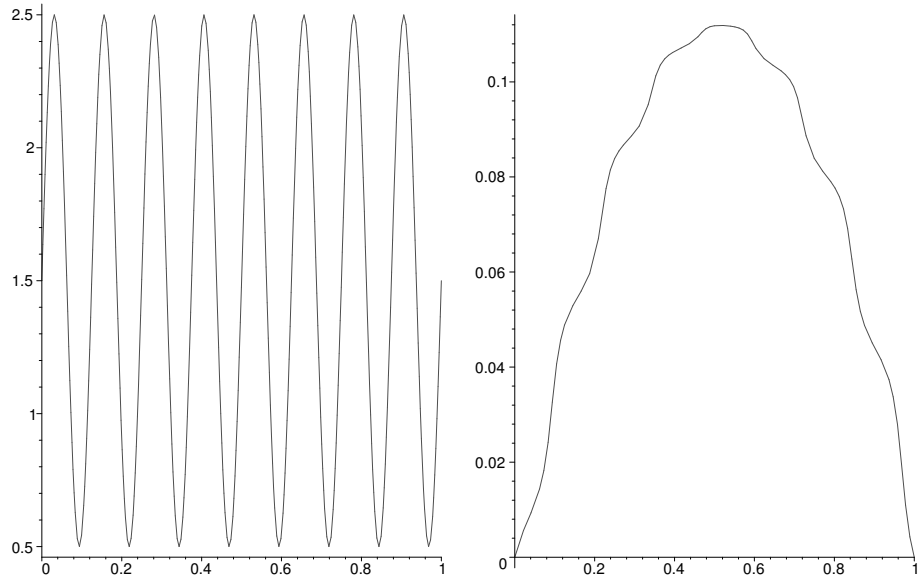


Fig. 2: Gráficos de $a(\cdot/\epsilon)$ e da solução exata para $\epsilon = 1/8$.

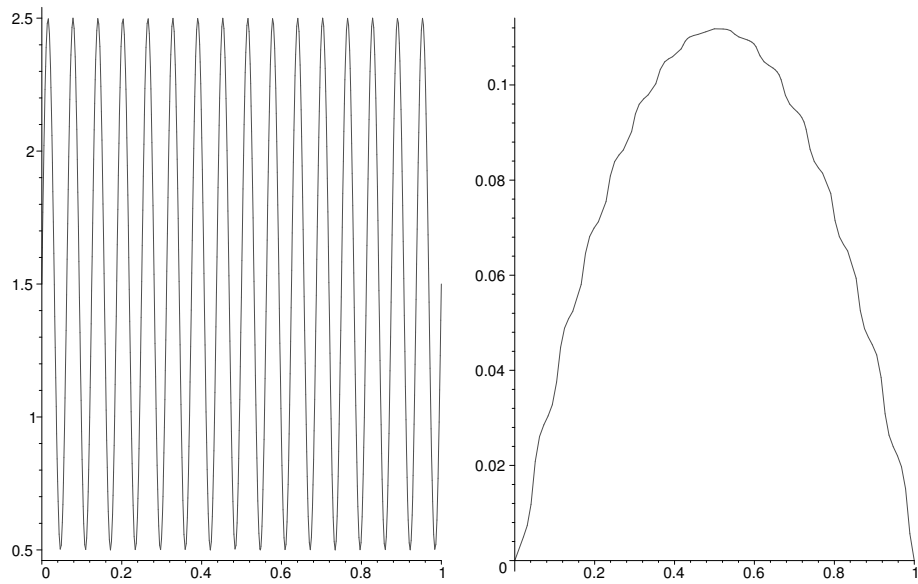


Fig. 3: Gráficos de $a(\cdot/\epsilon)$ e da solução exata para $\epsilon = 1/16$.

Outra possibilidade é o discretizar o problema usando *elementos finitos*. Esta escolha de método numérico deve-se tanto à aplicabilidade do método em diversos problemas de interesse, como também a facilidade em desenvolver uma análise de erro que ressalte eventuais dificuldades numéricas. Estas questões são analisadas na Seção 4.

Uma outra opção baseada em pesquisa recente [24, 25] é o uso de *elementos finitos multiescala*. Nesta técnica, descrita na Seção 5, funções de base que resolvem o problema *localmente* são utilizadas para gerar um espaço de elementos finitos, e automaticamente levam informações da pequena escala para a grande escala, num processo de *homogeneização numérica*.

3 Solução homogeneizada

Seja u^ϵ solução de (1). É possível então mostrar que u^ϵ converge para u^0 , onde

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mathcal{M}(1/a)} \frac{d^2}{dx^2} u^0 &= f(x) \quad \text{em } (0,1), \\ u^0(0) &= u^0(1) = 0, \end{aligned} \tag{3}$$

e

$$\mathcal{M}(1/a) = \int_0^1 \frac{1}{a(x)} dx.$$

Em uma dimensão, é fácil calcular u^0 analiticamente:

$$u^0(x) = \mathcal{M}(1/a) \left[-\int_0^x \int_0^\xi f(t) dt d\xi + x \int_0^1 \int_0^\xi f(t) dt d\xi \right].$$

A convergência ocorre usando norma do espaço $L^2(0,1)$. Este espaço é composto por funções $v : (0,1) \rightarrow \mathbb{R}$ “quadrado integráveis”, i.e.,

$$L^2(0,1) = \{v : v \text{ é função real definida em } (0,1) \text{ e } v^2 \text{ é integrável}\}.$$

Neste espaço definimos a norma

$$\|v\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 [v(x)]^2 dx \right)^{1/2}.$$

Observação 1 *Acima, e no restante deste texto, o adjetivo “integrável” quer dizer na verdade integrável no sentido de Lebesgue, uma idéia um pouco mais abrangente que a de integração no sentido de Riemann. Entretanto, é suficiente neste texto ter a intuição de funções integráveis como sendo Riemann integráveis.*

O seguinte resultado de convergência justifica o uso da solução homogeneizada [27].

Teorema 3.1 *Seja $f \in L^2(0,1)$, e seja u^ϵ solução de (1). Então existe uma constante c independente de $\epsilon, f, \alpha, \beta$ tal que*

$$\|u^\epsilon - u^0\|_{L^2(0,1)} \leq c \frac{\epsilon}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Comparamos agora como a solução homogeneizada se comporta, assumindo (2). Considere a seguinte sequência of exemplos, onde $\epsilon = 1/4$, $\epsilon = 1/8$, e $\epsilon = 1/16$, e veja as Figuras 4, 5 e 6. Pode-se notar que quando $\epsilon \rightarrow 0$, a solução homogeneizada u^0 torna-se uma boa aproximação para a solução exata u^ϵ .

Apesar de serem extremamente úteis em várias aplicações, as técnicas de homogeneização apresentam algumas limitações. Por exemplo, sua aplicabilidade está limitada a valores de ϵ pequenos, como fica aparente na figura 4. Outras dificuldades surgem em casos mais gerais, por exemplo quando $a(\cdot)$ é não periódico.

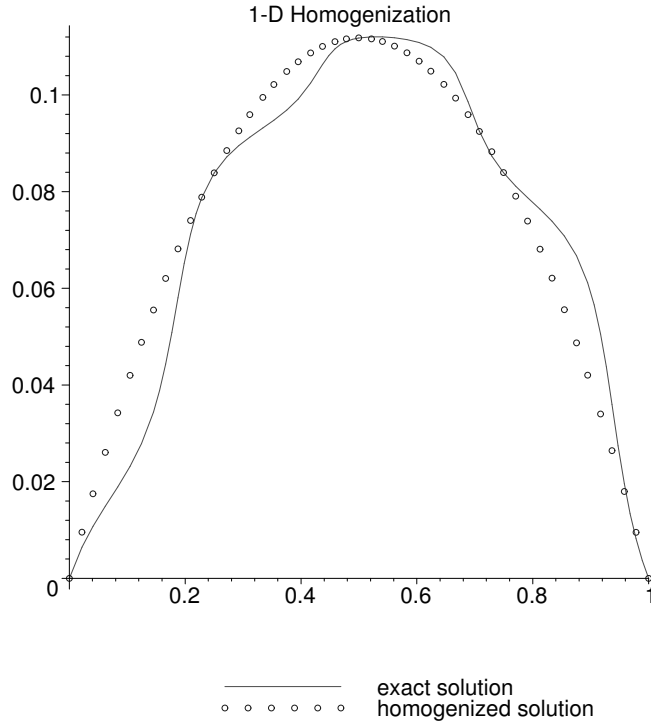


Fig. 4: Comparação entre as soluções exatas e homogeneizada para $\epsilon = 1/4$.

4 Aproximação por Elementos Finitos

O primeiro passo para apresentar o método é reescrever (1) na sua *forma fraca*. Se multiplicarmos a equação por uma função v suficientemente suave e que se anule em $x = 0$ e $x = 1$ e integrarmos por partes, temos que

$$\int_0^1 \left(a(x/\epsilon) \frac{du^\epsilon}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x)v(x) dx. \tag{4}$$

Note que se u^ϵ é solução de (1), então a identidade acima vale para todo v suficientemente suave.

É possível também inverter a ordem desse raciocínio, i.e., gostaríamos de buscar uma função u^ϵ que satisfizesse (4) para toda v suficientemente suave, e depois poderíamos mostrar que também resolve (1). Para tal, buscaremos a solução num espaço de funções que sejam contínuas, que tenham derivadas (no sentido fraco), e que se anulem em $x = 0$ e $x = 1$. Além disso, exigiremos que essas funções e suas derivadas sejam quadrado integráveis, i.e., podemos integrar tanto v^2 como $(v')^2$. Chamaremos esse espaço de

$$H_0^1(0,1) = \{v \in C[0,1] : v(0) = v(1) = 0; \quad v^2 \text{ e } (v')^2 \text{ são integráveis}\},$$

e introduzimos a norma

$$\|v\|_{H^1(0,1)} = \left(\int_0^1 \left\{ [v(x)]^2 + \left[\frac{dv}{dx}(x) \right]^2 \right\} dx \right)^{1/2}.$$

Como exemplo de funções que estão em $H_0^1(0,1)$, temos a importante classe de funções suaves por partes, como por exemplo a função mostrada na figura 7. Note que a função v^h lá representada

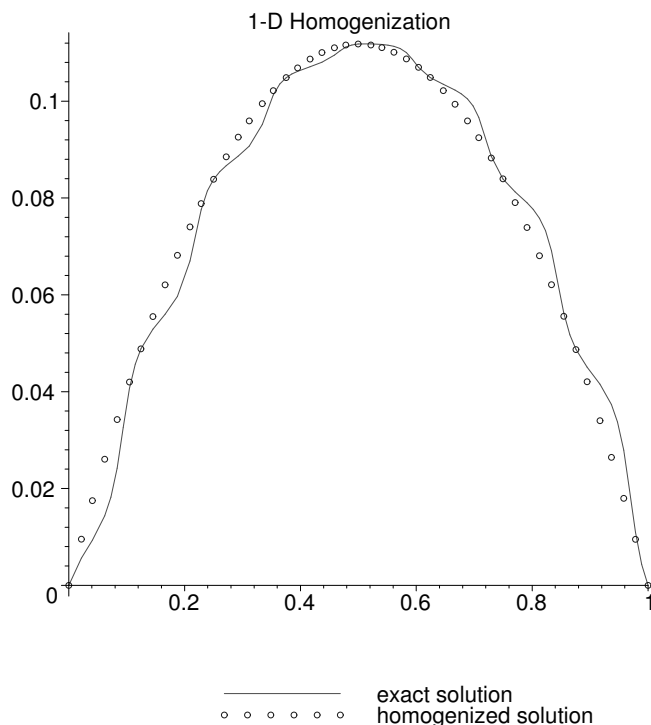


Fig. 5: Comparação entre as soluções exatas e homogeneizada para $\epsilon = 1/8$.

é contínua, se anula em $x = 0$ e $x = 1$, e além disso só deixa de ser suave num número finito de pontos.

O importante no momento é que é possível provar que existe uma função $u^\epsilon \in H_0^1(0, 1)$ satisfazendo (4) para todo $v \in H_0^1(0, 1)$. Além disso, no caso de f ser suave, esta solução também resolve (1). Ou seja, essas duas formulações são equivalentes.

4.1 Discretização por Elementos Finitos

No método de elementos finitos, escolhamos um subespaço de $H_0^1(0, 1)$ e buscamos funções que satisfaçam (4) dentro desse subespaço. Nós primeiro discretizamos o domínio $(0, 1)$ em elementos finitos definindo os nós $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_{N+1} = 1$, onde $x_j = jh$, e $h = 1/(N + 1)$ é o parâmetro de malha. A seguir, definimos o espaço de dimensão finita $V_0^h \subset H_0^1(0, 1)$, onde

$$V_0^h = \{v^h \in H_0^1(0, 1) : v^h \text{ é linear em } (x_{j-1}, x_j) \text{ for } j = 1, \dots, N + 1\}.$$

Chamamos V_0^h de espaço de funções lineares por partes. Uma função de V_0^h típica é representada na figura 7. A aproximação por elementos finitos de u^ϵ é $u^h \in V_0^h$ tal que

$$\int_0^1 \left(a(x/\epsilon) \frac{du^h}{dx}(x) \frac{dv^h}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x)v^h(x) dx \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h. \quad (5)$$

Observação 2 Note que u^h também depende de ϵ , apesar desta dependência não estar explicitada na notação.

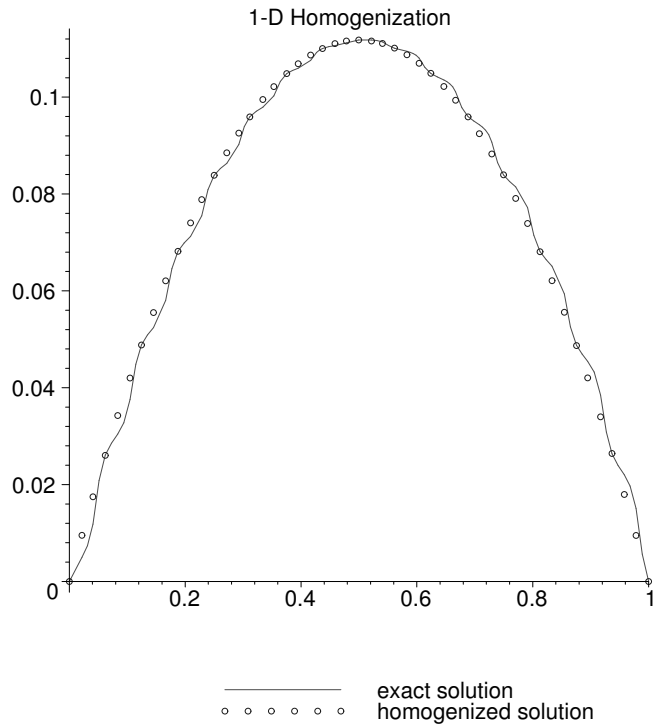


Fig. 6: Comparação entre as soluções exatas e homogeneizada para $\epsilon = 1/16$.

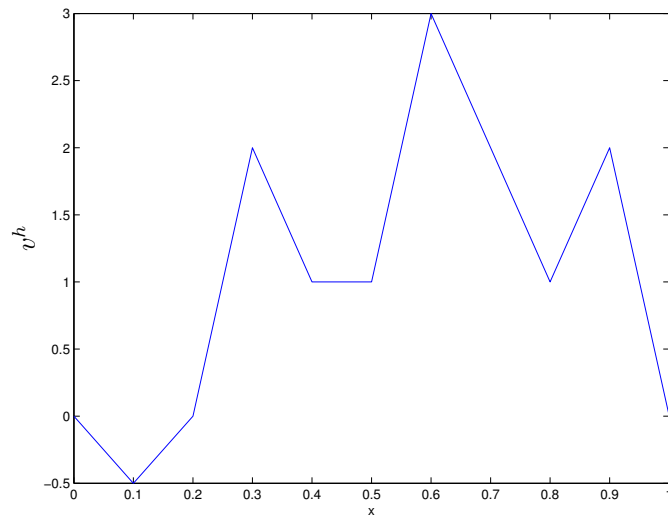


Fig. 7: Exemplo de função linear por partes

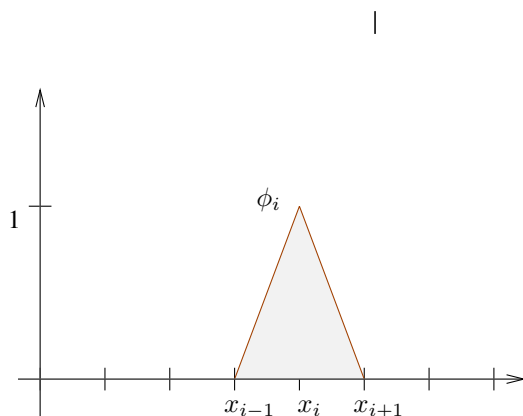


Fig. 8: Uma função da base do espaço de elementos finitos

Observe que uma função em V_0^h pode ser caracterizada de forma única pelos valores que assume nos nós x_1, x_2 , etc. Em vista disto, podemos introduzir uma *base* no espaço V_0^h . Seja $\phi_i \in V_0^h$ tal que

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

para $j = 1, \dots, N$. Uma função de base típica está representada na figura 8. Temos então $V_0^h = \text{span} \{\phi_1, \dots, \phi_N\}$.

Finalmente, se $u^h(x) = \sum_{i=1}^N u_i \phi_i(x)$, então reescrevemos (5) como

$$\sum_{i=1}^N u_i \int_0^1 \left(a(x/\epsilon) \frac{d\phi_i}{dx}(x) \frac{d\phi_j}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx \quad \text{para } j = 1, \dots, N. \quad (6)$$

Note que $u_j = u^h(x_j)$ é o valor de u^h no nó x_j .

O método de elementos finitos para (1) consiste então em achar $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)^T \in \mathbb{R}^N$ tal que

$$\mathbf{M}\mathbf{u} = \mathbf{f},$$

onde a matriz $\mathbf{M} = (M_{i,j}) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e o vetor $\mathbf{f} = (f_1, \dots, f_N)^T \in \mathbb{R}^N$ são dados por

$$M_{i,j} = \int_0^1 \left(a(x/\epsilon) \frac{d\phi_i}{dx}(x) \frac{d\phi_j}{dx}(x) \right) dx, \quad f_j = \int_0^1 f(x) \phi_j(x) dx.$$

As aproximações numéricas para (1), onde a é dada por (2) apresentam resultados variados. Para $\epsilon = 1/4$ e $h = 1/32$, o método de elementos finitos aproxima razoavelmente bem a solução exata, como mostra a figura 9. Entretanto, a aproximação se deteriora quando ϵ se torna menor. Veja os gráficos para $h = 1/32$, mas $\epsilon = 1/8$ na figura 10, e $\epsilon = 1/16$ na figura 11.

A aproximação melhora se refinarmos a malha. Por exemplo, tomando o caso $\epsilon = 1/8$, mas com $h = 1/64$, temos uma melhoria na aproximação, como mostra a figura 12.

O ponto que queremos ressaltar é que o método de elementos finitos converge, mas a *taxa de convergência depende de ϵ* . Isto pode ser um problema em dimensões maiores, quando o uso de malhas refinadas torna-se caro computacionalmente.

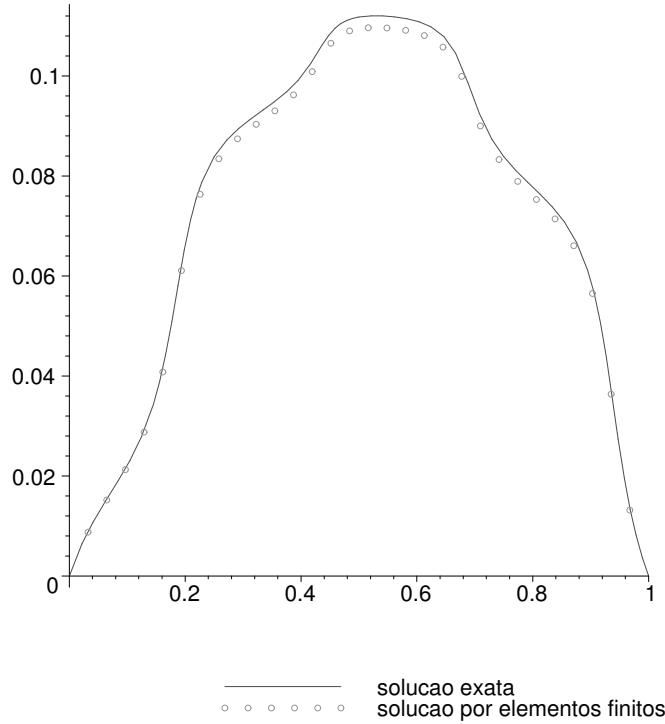


Fig. 9: Gráficos de u^ϵ e de sua aproximação por elementos finitos, com $\epsilon = 1/4$ e $h = 1/32$.

4.2 O que dá errado?

A fim de entender melhor porque o método de elementos finitos clássico não funciona bem, desenvolvemos uma análise de erro para esse problema. Aqui e no restante deste capítulo, c denota uma constante universal, independente de ϵ , h , f , α e β . Quando queremos indicar uma constante que pode depender de α ou β , mas não de ϵ , h ou f , utilizamos a letra maiúscula C .

Para facilitar a notação, definimos as formas bilineares

$$b(u, v) = \int_0^1 \left(a(x/\epsilon) \frac{du^\epsilon}{dx}(x) \frac{dv}{dx}(x) \right) dx, \quad (f, v) = \int_0^1 f(x)v(x) dx.$$

Temos então que a solução exata $u^\epsilon \in H_0^1(0, 1)$ e sua aproximação por elementos finitos $u^h \in V_0^h$ satisfazem

$$b(u^\epsilon, v) = (f, v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1), \quad b(u^h, v^h) = (f, v^h) \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

Logo

$$b(u^\epsilon - u^h, v^h) = 0 \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

Na nossa análise, usamos o fato que $\beta \geq a(x) \geq \alpha > 0$. Começamos a investigar a continuidade da forma bilinear $b(\cdot, \cdot)$. Segue-se de sua definição que

$$b(u, v) \leq \beta \|u\|_{H^1(0,1)} \|v\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } u, v \in H_0^1(0, 1). \quad (7)$$

A seguir, estimamos a coercividade:

$$b(v, v) \geq \alpha \int_0^1 \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 dx \geq c\alpha \|v\|_{H^1(0,1)}^2 \quad \text{para todo } v \in H_0^1(0, 1), \quad (8)$$

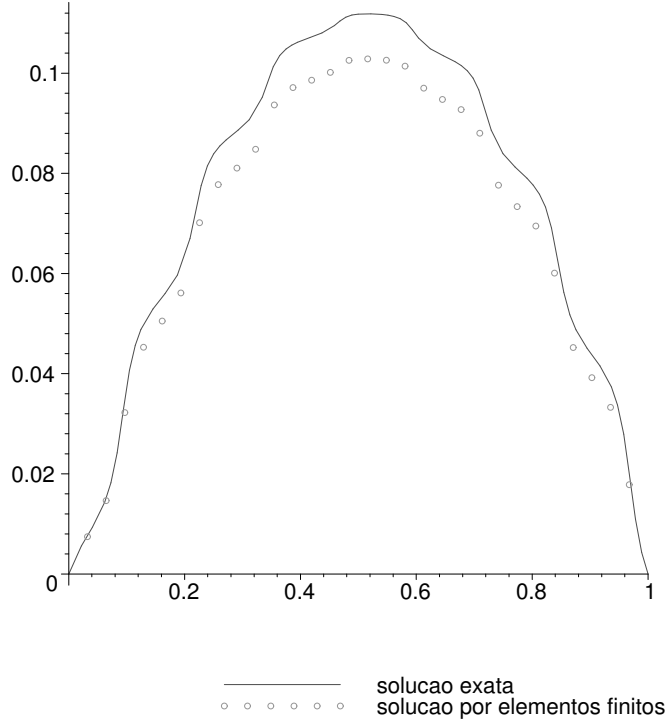


Fig. 10: Gráficos de u^ϵ e de sua aproximação por elementos finitos, com $\epsilon = 1/8$ e $h = 1/32$.

onde usamos a desigualdade de Poincaré

$$\int_0^1 \left(\frac{dv}{dx}(x) \right)^2 dx \geq c \int_0^1 \left[(v(x))^2 + \left(\frac{dv}{dx}(x) \right)^2 \right] dx$$

no último passo.

Podemos agora obter estimativas de erro. Usando (8), e depois (7), concluímos que

$$\begin{aligned} \|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)}^2 &\leq \frac{c}{\alpha} b(u^\epsilon - u^h, u^\epsilon - u^h) = \frac{c}{\alpha} b(u^\epsilon - u^h, u^\epsilon - v^h) \\ &\leq c \frac{\beta}{\alpha} \|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \|u^\epsilon - v^h\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h. \end{aligned} \quad (9)$$

Mostramos assim o Lema de Cea.

Lema 4.1 (Lema de Cea) *Sejam u^ϵ e u^h soluções de (1) e (5). Então existe uma constante universal c tal que*

$$\|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha} \|u^\epsilon - v^h\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^h \in V_0^h.$$

A seguir, usando estimativas clássicas de interpolação, temos que

$$\|u^\epsilon - I^h u^\epsilon\|_{H^1(0,1)} \leq ch |u^\epsilon|_{H^2(0,1)}, \quad (10)$$

onde $I^h u^\epsilon = \sum_{j=1}^N u^\epsilon(x_j) \phi_j$ é o interpolador de u^ϵ em V_0^h , e

$$|v|_{H^2(0,1)} = \left(\int_0^1 \left[\frac{d^2 v}{dx^2}(x) \right]^2 dx \right)^{1/2}.$$

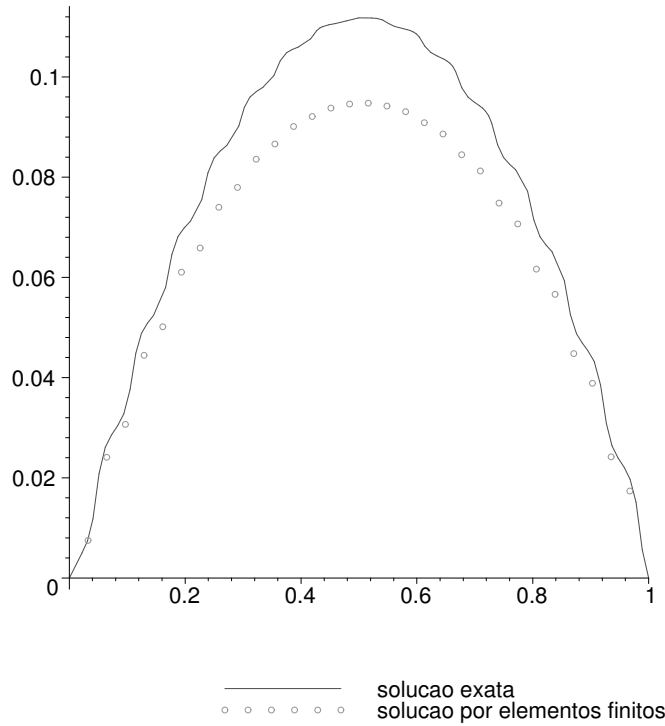


Fig. 11: Gráficos de u^ϵ e de sua aproximação por elementos finitos, com $\epsilon = 1/16$ e $h = 1/32$.

Fazendo $v^h = I^h u^\epsilon$ em (9), concluímos que

$$\|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha} h |u^\epsilon|_{H^2(0,1)}.$$

Obtemos finalmente o teorema a seguir usando a estimativa

$$|u^\epsilon|_{H^2(0,1)} \leq \frac{c\beta}{\alpha^2 \epsilon} \|f\|_{L^2(0,1)}, \tag{11}$$

onde assumimos $|a'(x)| \leq c\beta$.

Teorema 4.2 *Seja $f \in L^2(0, 1)$, e seja u^ϵ solução de (1). Então existe uma constante c independente de $\epsilon, f, \alpha, \beta$ tal que*

$$\|u^\epsilon - u^h\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta^2}{\alpha^3} \frac{h}{\epsilon} \|f\|_{L^2(0,1)}. \tag{12}$$

Paramos por um momento agora para interpretar a estimativa obtida. Antes de mais nada, o método converge quando $h \rightarrow 0$. De fato, para ϵ fixo, o erro vai a zero quando o tamanho da malha vai a zero. O problema é que a convergência em h não é uniforme em ϵ .

Logo, para ϵ pequeno, a menos que a malha seja muito refinada ($h \ll \epsilon$), a estimativa (12) indica que o erro na norma $H^1(0, 1)$ é grande. Isto faz com que o método de elementos finitos tradicional seja deficiente para este tipo de problema, e explica os maus resultados das figuras 10 e 11.

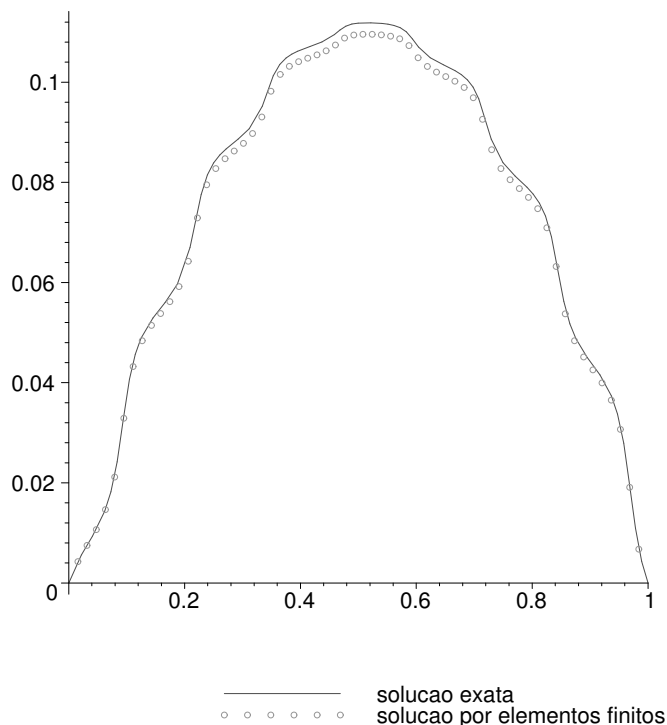


Fig. 12: Gráficos de u^ϵ e de sua aproximação por elementos finitos, com $\epsilon = 1/8$ e $h = 1/64$.

5 Elementos Finitos Multiescala

Mais recentemente, Tom Hou e seus colaboradores [24, 25] propuseram uma nova forma de aproximação numérica para EDPs em duas dimensões com coeficientes oscilatórios. A idéia básica é mudar as funções de base do espaço de elementos finitos. Ao invés de usar funções lineares por partes, a técnica de *elementos finitos multiescala* usa funções que resolvem localmente (em cada elemento) a equação em questão.

Apresentamos aqui as idéias no caso unidimensional. Em quase todos os aspectos, incluindo a análise de erro, a extensão para duas dimensões é natural. Comentamos ao fim desta seção alguns pontos onde esta generalização não é trivial.

Nós começamos a definir o método construindo as funções de base. Seja ψ_i tal que

$$-\frac{d}{dx} \left(a(x/\epsilon) \frac{d\psi_i}{dx}(x) \right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1} (x_{j-1}, x_j), \quad \psi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases} \quad (13)$$

para $i = 1, \dots, N$. Definimos então o espaço de elementos finitos multiescala como sendo

$$V_0^{h,\epsilon} = \text{span} \{ \psi_1, \dots, \psi_N \}.$$

Uma função de base típica é apresentada na figura 13 para $\epsilon = 1/4$ e $h = 1/32$. Note que a função se parece muito com a função de base do método de elementos finitos usual. Isto se explica pois neste caso o parâmetro de malha h é bem menor do que ϵ , e a função de base tradicional ainda funciona bem, vide figura 9. No caso oposto, quando ϵ é bem menor que h , temos que a função de base tem caráter oscilatório, como é mostrado na figura 14, para $\epsilon = 1/128$ e $h = 1/32$.

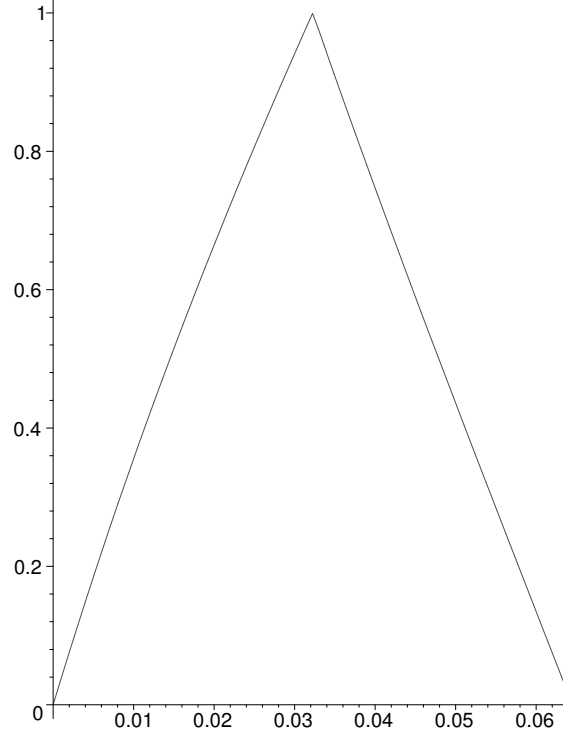


Fig. 13: Gráficos de ψ_1 com $\epsilon = 1/4$ e $h = 1/32$.

Usando o espaço acima definido, o método de elementos finitos multiescala busca $u^{h,\epsilon} \in V_0^{h,\epsilon}$ tal que

$$\int_0^1 \left(a(x/\epsilon) \frac{du^{h,\epsilon}}{dx}(x) \frac{dv^{h,\epsilon}}{dx}(x) \right) dx = \int_0^1 f(x) v^{h,\epsilon}(x) dx \quad \text{para todo } v^{h,\epsilon} \in V_0^{h,\epsilon}. \quad (14)$$

Matricialmente, temos que se $u^{h,\epsilon}(x) = \sum_{i=1}^N u_i^\epsilon \psi_i(x)$, então $\mathbf{u}^\epsilon = (u_1^\epsilon, \dots, u_N^\epsilon)^T \in \mathbb{R}^N$ é tal que

$$\mathbf{M}^\epsilon \mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{f}^\epsilon,$$

onde a matriz $\mathbf{M}^\epsilon = (M_{i,j}^\epsilon) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ e o vetor $\mathbf{f}^\epsilon = (f_1^\epsilon, \dots, f_N^\epsilon)^T \in \mathbb{R}^N$ são dados por

$$M_{i,j}^\epsilon = \int_0^1 \left(a(x/\epsilon) \frac{d\psi_i}{dx}(x) \frac{d\psi_j}{dx}(x) \right) dx, \quad f_j^\epsilon = \int_0^1 f(x) \psi_j(x) dx.$$

Testando então a aproximação para $\epsilon = 1/16$ e $h = 1/10$, vemos na figura 15 que a solução aproximada pelo método de elementos finitos multiescala interpola a solução exata nos nós. Isto não é uma coincidência, é apenas uma característica em uma dimensão de métodos de elementos finitos que utilizam funções que são soluções locais da própria EDP que estão aproximando. Em dimensões maiores essa propriedade é (infelizmente) perdida.

5.1 Análise de erro

A análise de erro desenvolvida em [25] baseia-se no Lema de Cea, como feito na Subseção 4.2.

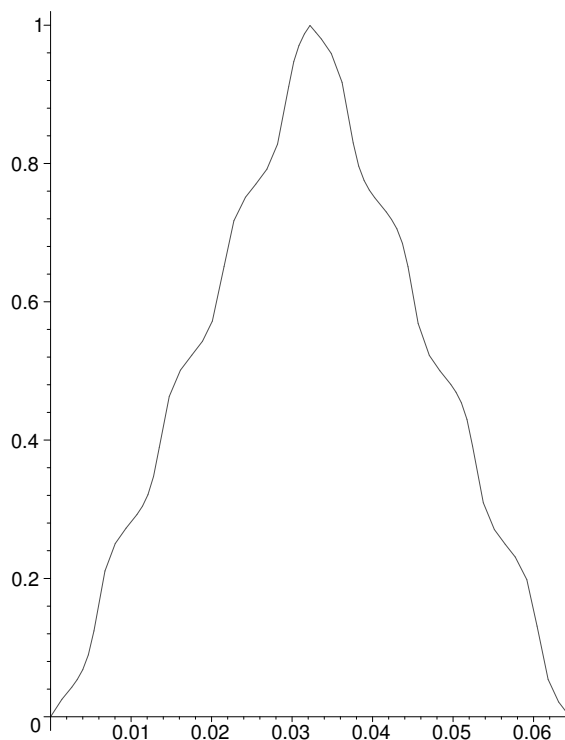


Fig. 14: Gráficos de ψ_1 com $\epsilon = 1/128$ e $h = 1/32$.

Lema 5.1 (Lema de Cea) *Sejam u^ϵ e $u^{h,\epsilon}$ soluções de (1) e (14). Então existe uma constante universal c tal que*

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha} \|u^\epsilon - v^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \quad \text{para todo } v^{h,\epsilon} \in V_0^{h,\epsilon}.$$

No método de elementos finitos clássico, encontramos uma função em V_0^h que “aproximava bem” u^ϵ e estimamos o erro de aproximação. No caso, a função em V_0^h era o interpolador de u^ϵ . Utilizando o Lema de Cea (Lema 4.1) obtivemos a estimativa final.

Similarmente, o desafio agora é achar uma aproximação para u^ϵ no espaço multiescala $V_0^{h,\epsilon}$. A análise divide-se em dois casos distintos, dependendo se a malha é refinada o suficiente ou não, em relação a ϵ . Na verdade, em uma dimensão, esta divisão em casos distintos não faz sentido. Mesmo assim, mantemos a análise dividida nestes dois casos, pois em dimensões maiores a análise de erro dá informações qualitativas diferentes dependendo se $h \ll \epsilon$ ou $\epsilon \ll h$.

Caso I: $h \ll \epsilon$. Neste caso em que assumimos a malha suficientemente refinada, obtemos a seguinte resultado de convergência, que, a menos de constantes, é o mesmo que o do Teorema 4.2. Ou seja, para malhas refinadas, o método multiescala funciona tão bem quanto o método tradicional.

Teorema 5.2 *Seja $f \in L^2(0,1)$, e seja u^ϵ solução de (1). Então existe uma constante c independente de $\epsilon, f, \alpha, \beta$ tal que*

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{\beta}{\alpha^2} h \|f\|_{L^2(0,1)}.$$

O teorema acima segue facilmente do Lema de Cea (Lema 5.1) e do seguinte resultado de interpolação [25].

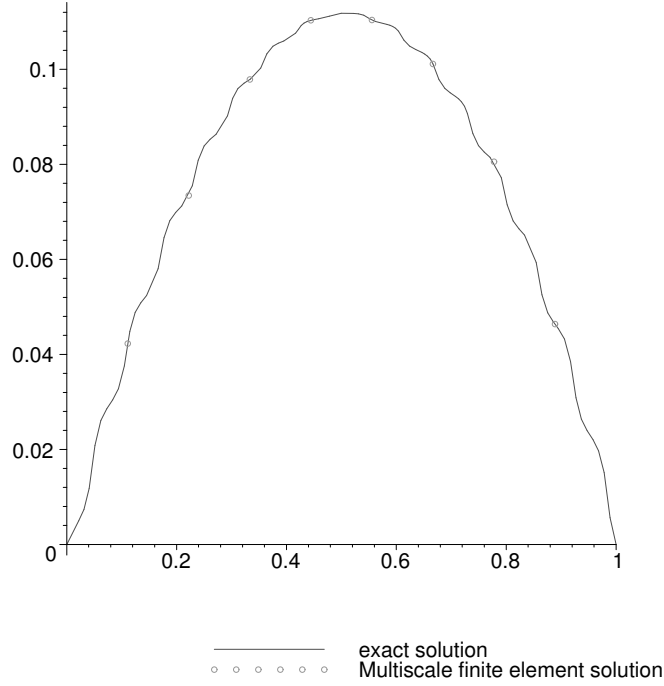


Fig. 15: Gráficos de u^ϵ e de sua aproximação por elementos finitos multiescala, com $\epsilon = 1/16$ e $h = 1/10$.

Lema 5.3 Seja u^ϵ solução de (1), e seja $I^{h,\epsilon}u^\epsilon = \sum_{j=1}^N u^\epsilon(x_j)\psi_j$ interpolador de u^ϵ em $V_0^{h,\epsilon}$. Então existe uma constante c independente de ϵ e f tal que

$$\|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon\|_{H^1(0,1)} \leq c \frac{h}{\alpha} \|f\|_{L^2(0,1)}^2.$$

Dem.: Note que

$$\begin{aligned} \alpha |u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}^2 &\leq \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{d}{dx} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) a(x/\epsilon) \frac{d}{dx} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) dx \\ &= - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) \frac{d}{dx} \left[a(x/\epsilon) \frac{d}{dx} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) \right] dx = - \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) \frac{d}{dx} \left[a(x/\epsilon) \frac{d}{dx} u^\epsilon \right] dx \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} (u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon) f dx \leq \|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)} \|f\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}. \end{aligned}$$

Mas a desigualdade de Poincaré nos dá que $\|v\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)} \leq ch|v|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}$ para todo $v \in H_0^1(x_{j-1}, x_j)$, e então

$$\alpha |u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}^2 \leq ch |u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \|f\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}.$$

Logo,

$$|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \leq c \frac{h}{\alpha} \|f\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}.$$

Para encontrar uma estimativa global, basta somar a desigualdade acima em todos os elementos

$$\|u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon\|_{H^1(0,1)}^2 \leq ch^2 \sum_{j=1}^N \frac{1}{\alpha^2} \|f\|_{L^2(x_{j-1}, x_j)}^2 = c \frac{h^2}{\alpha^2} \|f\|_{L^2(0,1)}^2,$$

e tirando raízes dos dois lados da equação obtemos o resultado. \square

Observação 3 *A estimativa obtida no Teorema 5.2 é particular ao caso unidimensional. Em duas dimensões, a demonstração do Lema 5.3 tem que ser modificada pois $u^\epsilon - I^{h,\epsilon}u^\epsilon$ não mais se anula no bordo dos elementos. O preço final a se pagar é uma estimativa que se comporta como h/ϵ , ou seja não é mais uniforme em ϵ como aqui.*

Caso II: $\epsilon \ll h$. Mesmo quando ϵ é pequeno em relação à malha, e o método de elementos finitos lineares não funciona a contento, os elementos finitos multiescala aproximam bem a solução exata. Abaixo apresentamos uma estimativa de erro.

Teorema 5.4 *Seja $f \in L^2(0,1)$, e seja u^ϵ solução de (1). Então existe uma constante C independente de ϵ e f tal que*

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C(\epsilon h^{-1/2} + h)\|f\|_{L^2(0,1)}.$$

Para estimar o erro de aproximação do presente método, temos que encontrar uma função em $V_0^{h,\epsilon}$ que aproxime u^ϵ para então aplicar o Lema de Cea (Lema 5.1). Nosso candidato é u_I , interpolador de u^0 em $V_0^{h,\epsilon}$. Note que no **Caso I** (quando $h \ll \epsilon$), tomamos como candidato o interpolador de u^ϵ , diferentemente do que fazemos agora.

Para entender porque este o método multiescala funciona bem quando $\epsilon \ll h$, é necessário usar uma melhor aproximação assintótica (inclusive com estimativas de erro) de u^ϵ . Isto é possível se calcularmos os primeiros termos da expansão assintótica. De fato, seja u^0 como acima e H solução de

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dy} \left(a(y) \frac{dH}{dy}(y) \right) &= \frac{da}{dy}(y) \quad \text{em } (0,1), \\ H \text{ periódica com período } 1, \quad \int_0^1 H(y) dy &= 0. \end{aligned} \tag{15}$$

Além disso, seja

$$u^1(x) = -H(x/\epsilon) \frac{du^0}{dx}(x). \tag{16}$$

e θ tal que

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} \left(a(x/\epsilon) \frac{d\theta}{dx}(x) \right) &= 0 \quad \text{em } (0,1), \\ \theta(0) = u^1(0), \quad \theta(1) &= u^1(1). \end{aligned} \tag{17}$$

Temos então o seguinte resultado [27].

Teorema 5.5 *Assuma que $f \in L^2(0,1)$, e seja u^ϵ solução de (1). Sejam u^0 , u^1 e θ definidos por (3), (16) e (17) respectivamente. Então existe uma constante C independente de f e de ϵ tal que*

$$\|u^\epsilon - u^0 - \epsilon u^1 + \epsilon \theta\|_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon \|u^0\|_{H^2(0,1)}.$$

Hou et al. [25] notaram que a expansão acima vale tanto para a solução exata como para os elementos da base de elementos finitos multiescala. Logo, para $i = 1, \dots, N$ a função ψ_i pode ser aproximada por

$$\psi_i^0 + \epsilon\psi_i^1 - \epsilon\theta_i,$$

onde

$$-\frac{d^2}{dx^2}\psi_i^0 = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1}(x_{j-1}, x_j), \quad \psi_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{se } i \neq j, \end{cases}$$

e $\psi_i^1 = H(x/\epsilon)d\psi_i^0/dx$. Finalmente

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\epsilon)\frac{d\theta_i}{dx}(x)\right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1}(x_{j-1}, x_j), \quad \theta_i(x_j) = \psi_i^1(x_j).$$

Observação 4 Note que no caso unidimensional, ψ_i^0 nada mais é que a função de base linear por partes ϕ_i .

Como acima, u_I pode ser aproximado por $u_I^0 + \epsilon u_I^1 - \epsilon\theta_I$, onde $u_I^0 = \sum_{i=1}^N u^0(x_i)\psi_i^0$, e $u_I^1 = H(x/\epsilon)du_I^0/dx$. Além disso,

$$-\frac{d}{dx}\left(a(x/\epsilon)\frac{d\theta_I}{dx}(x)\right) = 0 \quad \text{em } \cup_{j=1}^{N+1}(x_{j-1}, x_j), \quad \theta_I(x_j) = u_I^1(x_j).$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \|u^\epsilon - u_I\|_{H^1(0,1)} &\leq \|u^\epsilon - u^0 - \epsilon u^1 + \epsilon\theta\|_{H^1(0,1)} + \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)} + \epsilon\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} \\ &\quad + \epsilon\|\theta\|_{H^1(0,1)} + \epsilon\|\theta_I\|_{H^1(0,1)} + \|u_I - u_I^0 - \epsilon u_I^1 + \epsilon\theta_I\|_{H^1(0,1)} \end{aligned} \quad (18)$$

A desigualdade

$$\|u^\epsilon - u^0 - u^1 + \epsilon\theta\|_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon\|u^0\|_{H^2(0,1)} \quad (19)$$

é apresentada no Teorema 5.5. Já

$$\|u_I - u_I^0 - u_I^1 + \epsilon\theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq C\epsilon\|u^0\|_{H^2(0,1)} \quad (20)$$

baseia-se no Teorema 5.5 e na estimativa $\|u_I^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)} \leq C\|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}$ (ver os detalhes em [25]). Para obter

$$\|u^0 - u_I^0\|_{H^1(0,1)} \leq Ch\|u^0\|_{H^2(0,1)}, \quad (21)$$

basta observar que u_I^0 é a interpolação de u^0 por funções lineares por partes.

A seguir, usamos

$$\begin{aligned} \|u^1 - u_I^1\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} &= \left\| H(\cdot/\epsilon)\frac{d(u^0 - u_I^0)}{dx} \right\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \leq \epsilon^{-1} \left\| \frac{dH}{dx} \right\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} \\ &\quad + \|H\|_{L^\infty(0,1)} \|u^0 - u_I^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)} \leq C\epsilon^{-1} \|u^0 - u_I^0\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)} + C\|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}. \end{aligned}$$

Somando o quadrado da desigualdade acima entre $j = 1$ e $j = N + 1$ temos

$$\|u^1 - u_I^1\|_{H^1(0,1)} \leq C(\epsilon^{-1}h + 1)\|u^0\|_{H^2(0,1)}. \quad (22)$$

Finalmente temos

$$\|\theta\|_{H^1(0,1)} \leq C(|u^1(0)| + |u^1(1)|) \leq C\|H\|_{L^\infty(0,1)} \left(\left| \frac{du^0}{dx}(0) \right| + \left| \frac{du^0}{dx}(1) \right| \right) \leq C\|u^0\|_{H^2(0,1)}, \quad (23)$$

e

$$\begin{aligned} \|\theta_I\|_{H^1(x_{j-1}, x_j)}^2 &\leq Ch^{-1}(|u_I^1(x_{j-1})| + |u_I^1(x_j)|)^2 \leq Ch^{-1}\|H\|_{L^\infty(0,1)}^2 \left(\left| \frac{du_I^0}{dx}(x_{j-1}) \right| + \left| \frac{du_I^0}{dx}(x_j) \right| \right)^2 \\ &\leq Ch^{-1}\|u^0\|_{H^2(x_{j-1}, x_j)}^2. \end{aligned}$$

Somando a desigualdade acima entre $j = 1$ e $j = N + 1$, concluímos que

$$\|\theta_I\|_{H^1(0,1)} \leq Ch^{-1/2}\|u^0\|_{H^2(0,1)}. \quad (24)$$

Dem.: (do Teorema 5.4) Para obtermos a estimativa, basta juntar o resultado do Lema 5.1 e as desigualdades (18)–(24), e o resultado de regularidade (11). \square

Observação 5 *O resultado do Teorema 5.4 é melhor que o demonstrado em [27], onde a taxa de convergência alegada é*

$$\|u^\epsilon - u^{h,\epsilon}\|_{H^1(0,1)} \leq C_1 h \|f\|_{L^2(0,1)} + C_2 (\epsilon/h)^{1/2}.$$

A diferença aparece nas estimativas de θ e θ_I , que é diferente em uma ou duas dimensões.

5.2 Outros Comentários

Uma importante diferença entre uma e duas dimensões na técnica de elementos multiescala é que no caso bidimensional não é claro que condições de contorno deve-se impor nas arestas na definição das funções de base ψ_i , ver (13). Em uma dimensão este problema não existe, já que não existe aresta.

Uma primeira idéia no caso de elementos poligonais seria impor ψ_i sendo linear nas arestas. Porém esta imposição de condições de contorno nas arestas dos elementos causa o surgimento de camadas limites puramente numéricas no interior do domínio, ausentes na solução exata. Os autores chamam este fenômeno de *ressonância*.

Nos artigos [24, 25] surge a interessante proposta de que as funções de base também deveriam satisfazer uma “restrição unidimensional” do operador diferencial que define a EDP, ao longo das arestas. Esta proposta é *ad hoc*, assim como a definição do que seja uma restrição unidimensional de um operador bidimensional, mas parece funcionar bem numericamente. A demonstração de convergência em [25] foi feita assumindo que as funções de base são lineares nas arestas.

Outra solução proposta em [24] para a ressonância, e analisada em [14] foi o uso de uma técnica de *oversampling*, o que torna o método não conforme.

Finalmente, em [26] aparece a proposta de se usar o método de Petrov–Galerkin a fim de diminuir ainda mais o efeito das camadas limites internas. O uso de Petrov–Galerkin para minimizar efeitos de camadas limites espúrias foi em proposto independentemente em [17].

Para problemas elíticos não lineares, os autores de [15, 13] propõem e analisam um método de homogenização numérica. Através de técnicas de *G-convergência*, os autores provam que seu esquema converge (a menos de uma subsequência). Eles reescrevem suas propostas usando uma formulação de Petrov–Galerkin, e funções num espaço não linear. Torna-se claro então que seu método, denominado *nonlinear multiscale finite element method* (NMsFEM) é uma generalização do MsFEM de T.Y. Hou and X.H. Wu [24].

6 Outros Métodos

Outros métodos vêm sendo propostos recentemente na literatura. Apresentamos aqui alguns deles, com uma pequena lista de referências.

6.1 Residual Free Bubbles (RFB)

A fim de tratar problemas singularmente perturbados de forma sistemática, o método de *Residual-Free Bubbles* (RFB) foi proposto em [4, 16, 19, 18, 20, 21]. Estas “bolhas” são funções com suporte local que resolvem, exata ou aproximadamente, a equação diferencial em cada elemento. O lado direito destes problemas vem do resíduo devido à parte polinomial da solução numérica. Outro fator é que as bolhas se anulam no bordo de cada elemento.

A seguir apresentamos de forma breve a idéia central do RFB. Ver também [23], onde o método é descrito.

Em geral, para problemas com múltiplas escalas, é possível decompor a solução como

$$u_{\text{solução}} = u_{\text{macro}} + u_{\text{micro}}$$

No método RFB, a decomposição é

$$u_{\text{RFB}} = u_{\text{linear}} + u_b$$

onde u_{linear} é a parte linear por partes, e a “bolha” u_b captura informações sobre a microescala.

Considerando o problema abstrato

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\epsilon u &= f \quad \text{em } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

e sua formulação fraca: achar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$a(u, v) = (f, v) \quad \text{para todo } v \in H_0^1(\Omega).$$

Aqui, Ω é um polígono, $\epsilon > 0$ representa a pequena escala, e

$$(f, v) = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Tomamos como exemplo

$$\mathcal{L}^\epsilon u = -\operatorname{div}(K^\epsilon(x) \nabla u),$$

e

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (K^\epsilon(x) \nabla u) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}.$$

Considere a partição de Ω em elementos finitos, e o *espaço enriquecido* associado

$$V_h := V_1 \oplus B,$$

onde

- $V_1 \subset H_0^1(\Omega)$ é o espaço das funções lineares ou bilineares por partes
- $B \subset H_0^1(\Omega)$ é o espaço das “bolhas”, funções que se anulam no bordo dos elementos

O método consiste em achar $u_h \in V_h = V_1 \oplus B$ onde

$$a(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \text{para todo } v_h \in V_h.$$

Escrevendo $u_h = u_1 + u_b$ temos

$$\begin{aligned} a(u_1 + u_b, v_1) &= (f, v_1) \quad \text{para todo } v_1 \in V_1, \\ a(u_1 + u_b, v_b) &= (f, v_b) \quad \text{para todo } v_b \in B. \end{aligned}$$

Logo, a segunda equação é válida em cada elemento:

$$a(u_1 + u_b, v_b)|_K = (f, v_b)|_K \quad \text{para todo } v_b \in H_0^1(K),$$

para todo elemento K . A parte da bolha é solução forte do problema local

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^\epsilon u_b &= -\mathcal{L}^\epsilon u_1 + f \quad \text{em } K, \\ u_b &= 0 \quad \text{em } \partial K. \end{aligned}$$

Escrevendo $u_b = T(-\mathcal{L}^\epsilon u_1 + f)$ e usando condensação estática, temos

$$\begin{aligned} a(u_1 + u_b, v_1) &= (f, v_1) \implies a(u_1 + T(-\mathcal{L}^\epsilon u_1 + f), v_1) = (f, v_1) \\ \implies a(u_1 - T\mathcal{L}^\epsilon u_1, v_1) &= (f, v_1) - a(Tf, v_1) \implies a((I - T\mathcal{L}^\epsilon)u_1, v_1) = (f, v_1) - a(Tf, v_1) \end{aligned}$$

para todo $v_1 \in V_1$,

Uma primeira forma de se interpretar a formulação acima é como um *método estabilizado livre de parâmetros*: achar $u_1 \in V_1$ onde

$$a(u_1, v_1) - a(T\mathcal{L}^\epsilon u_1, v_1) = (f, v_1) - a(Tf, v_1) \quad \text{para todo } v_1 \in V_1.$$

Uma outra forma é se olhar como uma técnica de “upscaling” numérico: achar $u_1 \in V_1$ onde

$$a^*(u_1, v_1) = \langle f^*, v_1 \rangle \quad \text{para todo } v_1 \in V_1,$$

e

$$a^*(u_1, v_1) = a((I - T\mathcal{L}^\epsilon)u_1, v_1), \quad \langle f^*, v_1 \rangle = (f, v_1) - a(Tf, v_1).$$

Na interpretação multiescala:

- V_1 é o espaço macro, enxerga apenas as propriedades “macro”
- B é o espaço micro, capturando o efeito das pequenas escalas

Finalmente, é possível ver esta formulação “quase” como um método de Petrov–Galerkin. Se $\{\psi_i\}$ é uma base de V_1 , e $u_1 = \sum_{i=1}^N u_i \psi_i$, então

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N u_i a((I - T\mathcal{L}^\epsilon)\psi_i, \psi_j) &= (f, \psi_j) - a(Tf, \psi_j) \\ \implies \sum_{i=1}^N u_i a(\lambda_i, \psi_j) &= (f, \psi_j) - a(Tf, \psi_j), \quad \text{onde } \lambda_i = (I - T\mathcal{L}^\epsilon)\psi_i. \end{aligned}$$

Então,

$$\mathcal{L}^\epsilon \lambda_i = 0 \quad \text{em } K, \quad \lambda_i = \psi_i \quad \text{em } \partial K,$$

As funções de base do espaço das funções admissíveis resolvem o operador localmente, e as funções teste continuam as mesmas.

Recentemente, Giancarlo Sangalli aplicou a idéia de RFB em problemas com coeficientes oscilatórios também com excelentes resultados [31].

6.2 Heterogeneous Multiscale Method (HMM)

Uma proposta diferente é o *heterogeneous multiscale method* (HMM) descrita em [6, 7, 8, 9, 11, 10, 12, 28]. Damos uma breve descrição do método considerando o problema

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[a^\epsilon(x) \nabla u^\epsilon(x)] &= f(x) \quad \text{em } \Omega \subset \mathbb{R}^2, \\ u^\epsilon &= 0 \quad \text{em } \partial\Omega, \end{aligned}$$

onde $\epsilon \ll 1$ “representa” o tamanho das pequenas escalas, e $a^\epsilon : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Seja \mathcal{T}_h uma triangulação de Ω com parâmetro de malha h , e $P_0^1(\mathcal{T}_h)$ o espaço das funções contínuas e lineares por partes com respeito a \mathcal{T}_h . Se existir matriz efetiva A que incorpore os efeitos das microescalas, a forma bilinear

$$\int_D (A \nabla V) \cdot \nabla W \, dx \quad \text{para } V, W \in P_0^1(\mathcal{T}_h),$$

seria adequada para se buscar uma aproximação para a solução original.

Para um elemento $K \in \mathcal{T}_h$, considere a quadratura

$$\int_K p(x) \, dx \approx \sum_{l=1}^L w_l p(x_l).$$

Logo

$$\int_D (A \nabla V) \cdot \nabla W \, dx \approx \sum_{l=1}^L w_l [(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l).$$

Aproximamos $[(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l)$ da seguinte forma. Considere $I_\delta(x_l)$ o quadrado de tamanho δ centrado em x_l , e, dado $V \in P_0^1(\mathcal{T}_h)$ ache $v_l = R(V)$ tal que

$$\begin{aligned} -\operatorname{div}[a^\epsilon(x) \nabla v_l(x)] &= 0 \quad \text{em } I_\delta(x_l), \\ v_l &= V \quad \text{em } \partial I_\delta(x_l). \end{aligned}$$

Tome então

$$[(A \nabla V) \cdot \nabla W](x_l) \approx \frac{1}{\delta} \int_{I_\delta(x_l)} [a^\epsilon(x) \nabla v_l(x)] \cdot \nabla w_l(x) \, dx,$$

onde $v_l = R(V)$ e $w_l = R(W)$.

Observação 6 A escolha de δ depende do problema em questão. Por exemplo, para problemas periódicos, δ pode ser o próprio período. As condições de contorno para se definir o operador $R(\cdot)$ também podem ser mudadas para, por exemplo, $V - R(V)$ periódico em $I_\delta(x_l)$.

6.3 Outros Comentários

O uso de soluções exatas ou aproximadas para construir os espaços variacionais com em [1, 2, 3, 24, 25] não é simples, já que pode ser complicado escolher o espaço “correto” para um determinado problema. Uma interessante comparação mostrando como diferentes escolhas de espaços influenciam as taxas de convergência para um problema de advecção unidimensional pode ser encontrado em [22].

O formalismo do método RFB serve como “guia” para definição dos espaços variacionais. Por outro lado, a construção via RFB também introduz camadas limites espúrias no interior do domínio; assumir que a bolha se anula nas arestas é a causa.

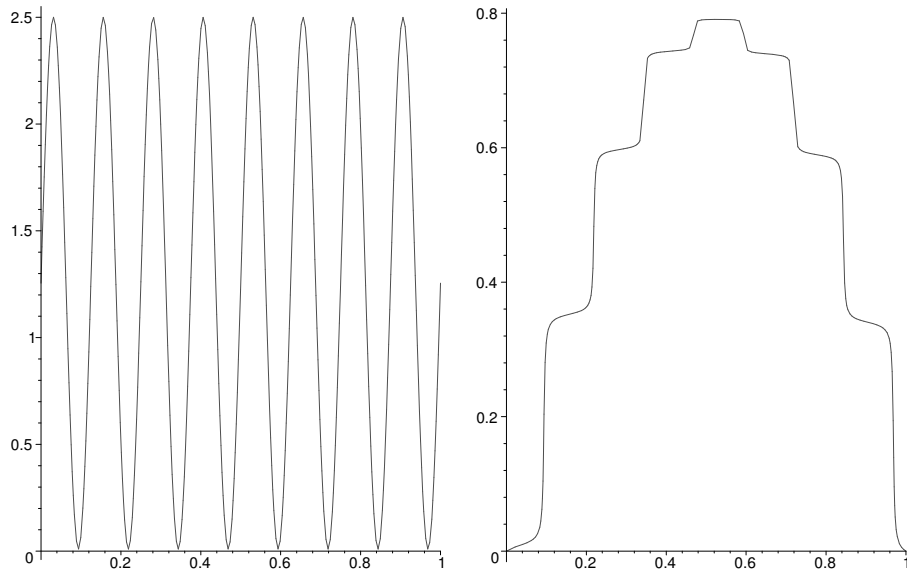


Fig. 16: Gráficos de $a(\cdot/\epsilon)$ e da solução exata para $\epsilon = 1/8$.

7 Uma dificuldade extra

Um outro problema que pode surgir quando tratamos de modelagem de meio heterogêneos, é a perda de coercividade. De fato, se α é muito pequeno em (1), o problema torna-se mais difícil de ser tratado. Consideramos aqui o exemplo dado por (2) mas com $\alpha = 0.01$, e $\epsilon = 1/8$. Na figura 16 mostramos o gráfico de $a(\cdot/\epsilon)$ e u^ϵ .

Mesmo para ϵ pequeno a aproximação pela solução homogeneizada já não é satisfatória. Comparando-se as figuras 5 e 17, percebe-se a deterioração da aproximação no último caso, como já era previsto pelo Teorema 3.1.

Esta deterioração é ainda mais aparente se utilizarmos elementos finitos lineares, como mostram as figuras 12 e 18. Note que, desta vez, a origem da dificuldade não é a magnitude de ϵ , mas sim a de α . De fato, mesmo para ϵ relativamente grande, a aproximação por elementos finitos falha. Na figura 19 apresentamos um exemplo numérico para $\epsilon = 1/2$ e $h = 1/64$. Mais uma vez esta piora era indicada por estimativas de erro. No Teorema 4.2, a constante é proporcional a α^{-3} .

Finalmente, por manter a característica de interpolar a solução exata em uma dimensão, o método de elementos finitos multiescala não se degrada mesmo com α pequeno, como pode ser visto na figura 20.

Referências

- [1] I. Babuška, G. Caloz, J.E. Osborn, special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients, *SIAM J. Numer. Anal.*, 31:945–981, No. 4, 1994.
- [2] I. Babuška, J.E. Osborn, Generalized finite element methods: their performance and their relation to mixed methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, 20:510–536, No. 3, 1983.
- [3] I. Babuška, J.E. Osborn, Finite Element Methods for the solution of problems with rough input data, *Singularities and constructive methods for their treatment*, (P. Grisvard and

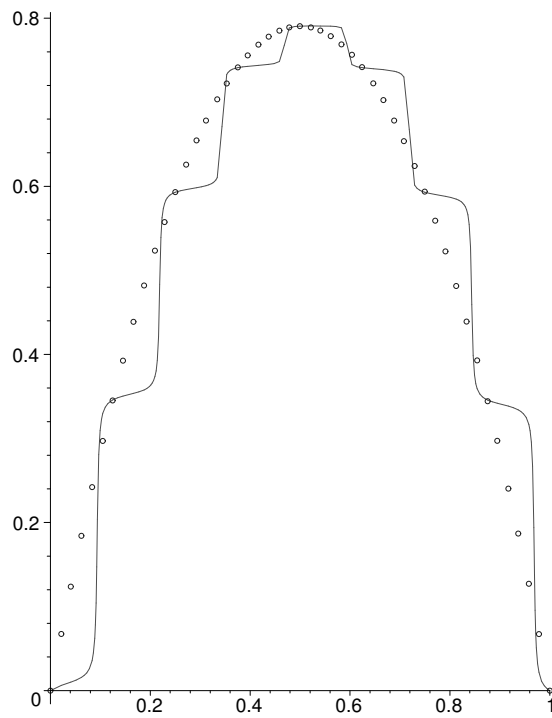


Fig. 17: Comparação entre as soluções exatas e homogeneizadas para $\epsilon = 1/8$.

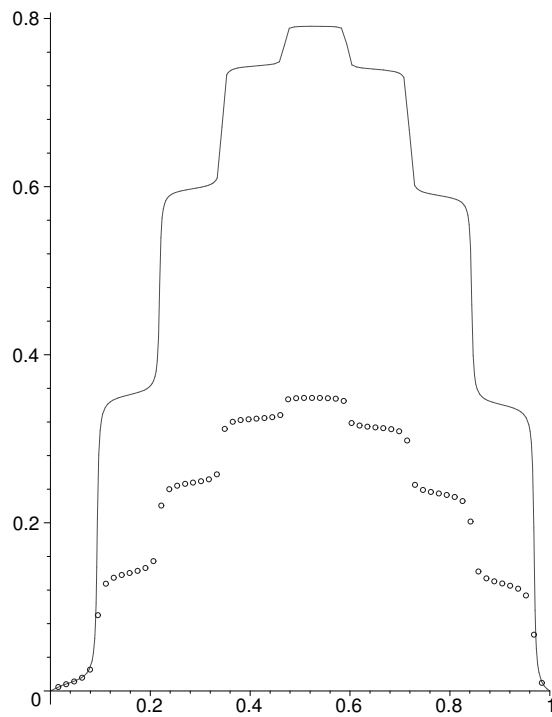


Fig. 18: Gráficos de u^ϵ e de sua aproximação por elementos finitos, com $\epsilon = 1/8$ e $h = 1/64$.

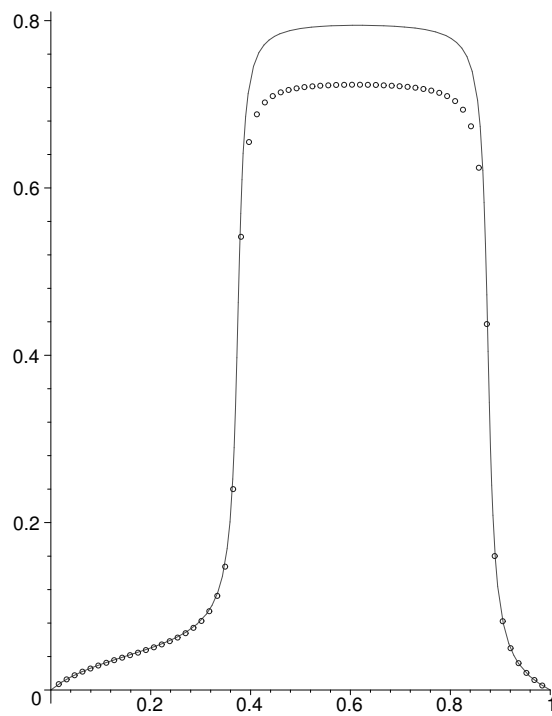


Fig. 19: Gráficos de u^ϵ e de sua aproximação por elementos finitos, com $\epsilon = 1/2$ e $h = 1/64$.

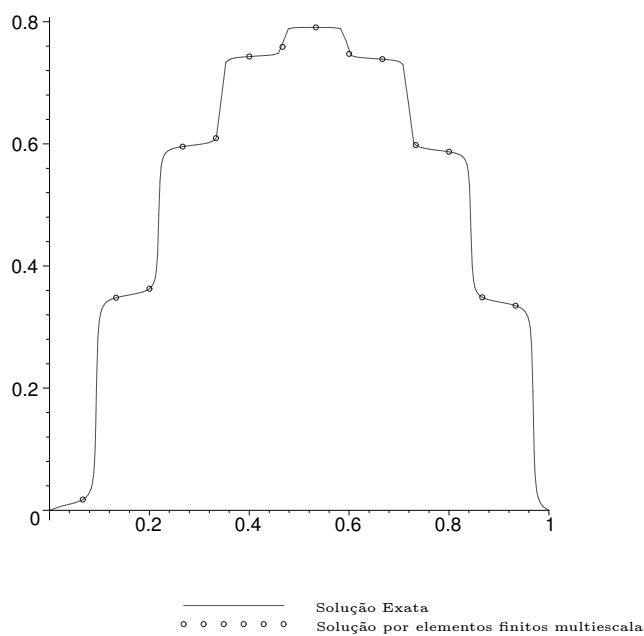


Fig. 20: Gráficos de u^ϵ e de sua aproximação por elementos finitos multiescala, com $\epsilon = 1/8$ e $h = 1/16$.

- W. Wendland and J.R. Whiteman, eds.), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1121, Springer-Verlag, 1–18, 1985
- [4] F. Brezzi, A. Russo, Choosing bubbles for advection-diffusion problems, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 4:571–587, No. 4, 1994.
- [5] D. Cioranescu, P. Donato, An introduction to Homogenization, Oxford Lecture Series in mathematics and its Applications, Vol. 17, 1999.
- [6] W. E, B. Engquist, Multiscale modeling and computation, *Notices of the American Mathematical Society*, 50:1062–1070, No. 9. 2003.
- [7] W. E, B. Engquist, The heterogeneous Multiscale Methods, *Comm. Math. Sci.*, 1:87–132, No. 1, 2003.
- [8] W. E, B. Engquist, The heterogeneous Multiscale Method for Homogenization Problems, *preprint*.
- [9] W. E, B. Engquist, Z. Huang, Heterogeneous Multiscale Method: a general methodology for multiscale modeling, *Physical Review B* 67, 2003.
- [10] W. E, X. Li, E. Vanden-Eijnden, Some Recent Progress in Multiscale Modeling, *preprint*.
- [11] W. E, P. Ming, Analysis of Multiscale methods, *Journal of Computational Mathematics* 22:210–219, No. 2, 2004.
- [12] W. E, P. Ming, P. Zhang, Analysis of the heterogeneous multiscale method for elliptic homogenization problems, *preprint*.
- [13] Y. Efendiev, T. Hou and V. Ginting, Multiscale finite element methods for nonlinear partial differential equations, *Communications in Mathematical Sciences*, accepted.
- [14] Y. Efendiev, T. Hou, X. Wu, Convergence of a nonconformal multiscale finite element method, *SIAM-J.-Numer.-Anal.*, 37:888–910, 2000.
- [15] Y. Efendiev, A. Pankov, Numerical Homogenization of Monotone Elliptic Eperators, *Multiscale Model. Simul.* 2:62–79, No. 1, 2003.
- [16] L.P. Franca, C. Farhat, A.P. Macedo, M. Lesoinne, Residual-free bubbles for the Helmholtz equation, *Internat. J. Numer. Methods Engrg.*, 40:4003–4009, No. 21, 1997.
- [17] L.P. Franca, A.L. Madureira, F.Valentin, Towards Multiscale Functions: Enriching Finite Element Spaces with Local but not Bubble-Like Functions, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering (CMAME)*, accepted for publication.
- [18] L.P. Franca, A. Russo, Deriving upwinding, mass lumping and selective reduced integration by residual-free bubbles, *Appl. Math. Lett.* 9:83–88, No. 5, 1996.
- [19] L.P. Franca, A. Russo, Approximation of the Stokes problem by residual-free macro bubbles, *East-West J. Numer. Math.* 4:265–278, No. 4, 1996.
- [20] L.P. Franca, A. Russo, Mass lumping emanating from residual-free bubbles, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 142:353–360, No. 3-4, 1997.
- [21] L.P. Franca, A. Russo, Unlocking with residual-free bubbles, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* 142:361–364, No. 3-4, 1997.

-
- [22] P.P.N. de Groen, P.W. Hemker, Error bounds for exponentially fitted Galerkin methods applied to stiff two-point boundary value problems, *Numerical Analysis of Singular Perturbations*, (P.W. Hemker and J.J.H. Miller, eds.), Academic Press, 217–249, 1979
- [23] T. Hou, Numerical Approximation to Multiscale Solutions in PDEs, *Frontiers in numerical analysis : Durham 2002*, (James F. Blowey, Alan W. Craig, Tony Shardlow, eds.), Springer, 241–302, 2003
- [24] T.Y. Hou, X.H. Wu, A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media, *JCP*, 134:169-189, 1997
- [25] T.Y. Hou, X.H. Wu, Z. Cai, Convergence of a multiscale finite element method for elliptic problems with rapidly oscillating coefficients, *Math. Comp.*, Vol. 68, 227:913–943, 1999
- [26] T.Y. Hou, X.-H. Wu, Y. Zhang, Removing the Cell Resonance Error in the Multiscale Finite Element Method via a Petrove-Galerkin Formulation, *Comm. Math. Sci.*, 2:185–205, No.2, 2004.
- [27] Moskow,S. and Vogelius,M. First order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium. A convergence proof, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 127A:1263–1299, 1997
- [28] P.B. Ming, X. Yue, Numerical Methods for Multiscale Elliptic Problems, *preprint*, 2003.
- [29] F.A. Rochinha, A.L. Madureira, Modelagem Multiescala em Materiais e Estruturas, *Notas em Matemática Aplicada*, Vol. 12, SBMAC, 2004.
- [30] H. Roos, M. Stynes, L. Tobiska, Numerical methods for singularly perturbed differential equations, Springer, 1991.
- [31] Sangalli,G., Capturing small scales in elliptic problems using a Residual-Free Bubbles Finite Element Method, *Multiscale Modeling and Simulation: A SIAM Interdisciplinary Journal*, Vol. 1, No. 3:485-503, 2003.